

Sequência de aprendizagem (Níveis) na medida do volume ou capacidade

	Concreto	Representacional	Simbólico
Comparação	A: 1. Encher/esvaziar recipientes 2. Fábula do corvo e da bilha 3. Mergulhar cubos	B:	C:
Unidades não Estandarizadas	D: 4. Pilhas no lixo, não. No pilhão! 5. Berlindes no sapato 6. Sólidos equivalentes 7. Construir caixas	E: 8. Contar cubos 9. Berlindes no sapato – gráfico 10. Investigando design de caixas	F: 11. Investigando design de caixas (exploração das fórmulas) 12. Applet do volume
Unidades Estandarizadas	G:	H: 13. Mergulhar para medir	I: 14. Aquário

Nível A

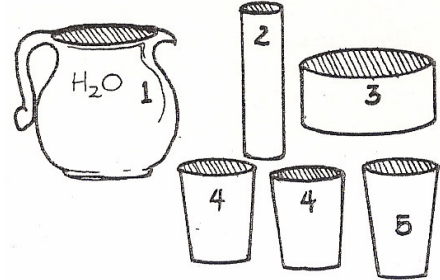
Concreto – comparação:

1. Encher/esvaziar recipientes

Material necessário: Água e 4 recipientes com formas semelhantes às da figura (os copos podem ser de papel):

Desenvolvimento da actividade:

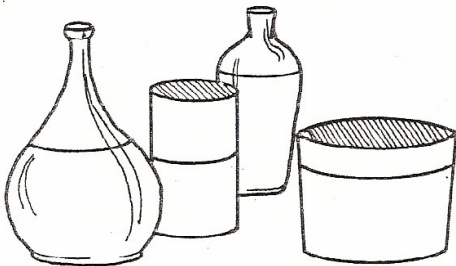
I - Peça a um aluno que encha dois copos iguais (recipiente 4) com a mesma quantidade de água. Em seguida, diga-lhe para vaziar a água de 1 copo no recipiente 3. Pergunte se os dois recipientes (4 e 3) têm a mesma quantidade ou se um tem mais do que o outro. Volte a pôr a água no copo vazio e repita o processo com os recipientes 2 e 5.



II - Use o copo 4 e oito copos pequenos (de café, por exemplo) e distribua a água do copo 4 pelos copos pequenos. Pergunte se há mais água no conjunto dos copos pequenos do que no copo 4. Reverta o processo e pergunte o mesmo.

Os alunos que não respondem correctamente a estas questões provavelmente não percebem que a capacidade é a mesma, mesmo quando há divisão por vários recipientes. Em I, a decisão pode ser baseada na altura da água nos recipientes (o recipiente 2 parece mais cheio do que o 4) enquanto em II a decisão pode ser baseada na quantidade (8 copos em oposição a um único mais largo) ou no tamanho de cada copo (cada copo é mais pequeno do que o 4). Nestes casos a noção de conservação de volume não está clara para estas crianças. Eles não são capazes de tomar decisões baseadas no facto de que a capacidade não muda, apesar de mudarem o tamanho e a forma dos recipientes. Ainda não conservem a capacidade, por isso devem realizar as experiências de comparação da sequência de aprendizagem, pois são elas que dão uma base concreta para o desenvolvimento da compreensão do conceito de capacidade.

Material necessário: recipientes de várias formas, arroz (ou água) e um funil.



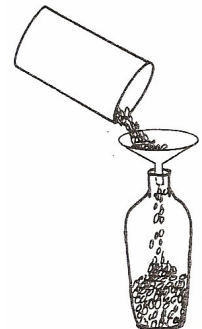
Desenvolvimento da actividade:

III - Peça aos alunos para encherem os recipientes até às marcas com arroz.

Os alunos devem explorar este processo e utilizar vocabulário apropriado: cheio, vazio, capacidade e encher até uma marca. Encoraje-os a comparar as quantidades de arroz. Os alunos podem

ordenar os recipientes pela capacidade do mais pequeno para o maior.

Pergunte como podem provar qual dos recipientes leva mais. O aluno deve compreender que se se despeja o arroz de um recipiente num outro e transborda ou ultrapassa a linha marcada, o primeiro recipiente tem maior capacidade.



Levante hipóteses sobre o recipiente que tem maior capacidade; use recipientes com formas diferentes e a mesma capacidade. Questione sobre a capacidade de cada um, relacionando-as. Verifique. Explore o vocabulário grande, pequeno, maior, menor, ocupa mais espaço, ocupa o mesmo volume.

Adaptado de Measurement Investigations, capítulo 4

2. Fábula do corvo e da bilha

Leia aos seus alunos a fábula “O Corvo e a Bilha” de Esopo.

O Corvo e a Bilha

Um corvo, meio morto com sede, encontrou uma bilha que já tinha estado cheia de água; mas, quando o corvo pôs o bico na boca da bilha viu que apenas restava uma pequena quantidade de água no fundo e não conseguia lá chegar para beber.

Ele tentou, tentou, mas por fim teve que tirar o bico, desesperado.

Então teve uma ideia: apanhou uma pedra e deixou-a cair na bilha.

E apanhou outra pedra e deixou-a cair na bilha.

E apanhou outra pedra e deixou-a cair na bilha.

E apanhou outra pedra e deixou-a cair na bilha.

Por fim, viu que a água subiu e ficou perto dele e, depois de arranjar mais algumas pedras, conseguiu matar a sede e salvar a vida.

Peça-lhes para explicarem por palavras deles o que acontece na história. Coloque questões que ajudem os alunos a perceber os aspectos matemáticos da história.

Adaptado de Navigating through Measurement in Grades 3-5, NCTM, 2005

3. Mergulhar cubos

Material necessário:

- copos transparentes (ou garrafas de plástico de 1,5l cortadas ao meio);
- cubos isolados que não flutuem;
- diferentes construções usando 6 cubos iguais aos anteriores;
- marcadores

Desenvolvimento da actividade:

Coloque água num recipiente até meio. Marque o nível de água com um marcador.

Peça aos alunos para descrever o que vai acontecer ao nível de água quando introduzimos uma das construções no recipiente.

Introduza a construção e marque o nível da água. Discuta o que aconteceu.

Retire a construção e questione os alunos sobre o que acontecerá ao nível da água quando introduzimos cada uma das outras construções.

Verifique as respostas introduzindo cada uma das construções.

Coloque questões: Porque subiu o nível da água? Porque é que sólidos diferentes mas construídos com 6 dados fizeram a água subir até ao mesmo nível?

No recipiente com água no nível inicial questione os alunos acerca do que acontecerá se introduzirmos um cubo. E dois? E três? E quatro? E cinco? E seis?

Verifique as respostas dos alunos realizando a experiência.

Peça-lhes para fazerem previsões de onde ficaria a marca do nível se usassem 12 cubos. E se forem 9 cubos?

Parece-nos fundamental aproveitar o potencial desta actividade propondo aos alunos uma tarefa de escrita. Deverá pedir-lhes que **elaborem um relatório** onde escrevam sobre a experiência e registem as conclusões a que chegaram.

Nível D

Concreto – unidades não estandardizadas:

Nota:

No contexto da actividade 1, podem utilizar-se outros recipientes e colocar novas questões. Utilize o mesmo recipiente e dois copos de tamanho diferente para o encher. Com a mesma unidade (copo) meça a capacidade de recipientes com a mesma capacidade mas com formas diferentes.

4. Pilhas no lixo, não. No pilhão!

Objectivos:

Medir a capacidade do pilhão usando 2 tipos de pilhas como unidade. Estimar nº de pilhas; rectificar a estimativa.

Desenvolvimento da actividade:

Apresentar aos alunos o texto que se segue, ou outro semelhante, que pode ser colocado num cartaz na sala, para enquadrar a actividade

Não seas indiferente, ajuda o ambiente!

Sabias que as pilhas recolhidas são separadas por sistemas químicos e tratadas, obtendo-se ferro, óxidos de zinco e manganésio, utilizados sobretudo na indústria do aço e da construção? Para mais informações podes consultar o site www.ecopilhas.pt

Recolhe, em tua casa, as pilhas usadas, leva-as para a escola e coloca-as no Mini Pilhão. O pilhão tem a forma de um prisma quadrangular de 8 x 8 x 16 cm.

Faz uma estimativa de quantas pilhas AAA caberão no pilhão. E se forem AA quantas caberão?

Ao fim de um mês peçam ao vosso professor para ver qual a altura atingida pelas pilhas, contem-nas e reformulem a vossa estimativa.

Quando a caixa estiver cheia, podem contar as pilhas, verificar se fizeram boas estimativas e enviar as pilhas para a reciclagem.

5. Berlindes no sapato

Objectivo:

Desenvolver o conceito de unidade de capacidade

Material necessário: 250 berlindes por equipa; Sapatos das crianças. Ficha de trabalho em anexo.

Desenvolvimento da actividade:

Coloque os alunos em grupos. Cada grupo escolherá o sapato ou sapatilha de um dos elementos, para a actividade. De seguida a turma é desafiada a estimar qual será o sapato maior. Usando berlindes, os alunos vão enchendo o sapato da sua equipa.

Depois de terem completado esta tarefa começam a contar os berlindes que foram utilizados para encher o sapato. Se as crianças não conseguirem contar números tão elevados podem simplesmente criar filas de berlindes e depois verificar qual a fila mais comprida.

Esta actividade funciona melhor com maior número de grupos.

Após a contagem os alunos discutem os resultados obtidos para chegar à conclusão de qual o sapato com maior capacidade.

Enquanto as crianças vão enchendo os sapatos, pode ir pedindo às crianças para refazerem as suas estimativas com os resultados que vão observando. No final devem preencher a ficha de trabalho e discutir os resultados.

Adaptado de Measurement Investigation, Dale Seymour Publication, 1992

6. Sólidos equivalentes

Material necessário: cubos de madeira ou plástico. Os cubos em plástico de encaixar são os melhores para esta actividade (as caixas de cubos de encaixar têm 100 cubos). Ficha de trabalho em anexo.

Notas para o professor: A quantidade de cubos a utilizar depende do tipo de organização escolhida para a turma. A actividade fica mais rica se cada aluno tiver oportunidade de construir sólidos e de comparar os diferentes sólidos equivalentes construídos pelo grupo. A dimensão dos sólidos é pequena e só uma observação muito próxima permite ver se os sólidos equivalentes são mesmo diferentes ou não, pois a variação da posição pode dificultar essa percepção. Os sólidos não podem ser construídos e logo desmanchados. Assim, em cada grupo de 4 alunos deviam existir, pelo menos, 50 cubos, o que permitiria a construção de 6 sólidos diferentes.

Os alunos podem responder às questões colocadas na tarefa: **sólidos equivalentes**. Deve ser entregue apenas uma folha por grupo, e os alunos devem distribuir tarefas: um pode ficar responsável por ler as questões, outros dois constroem os dois primeiros sólidos e depois todos constroem os sólidos que conseguirem.

Nota: No CD-ROM ClicMat, existem 3 tarefas sobre visualização de sólidos iguais, com graus de dificuldade diferente, que permitem trabalhar de outra forma estes conceitos.

Tarefa adaptada da pasta "Materiais para o 1º ciclo" Versão reformulada, caderno 2, APM

7. Construir caixas

Pré-requisitos:

Os alunos devem estar familiarizados com prismas retangulares.

Objectivos:

Estimar quantos cubos serão necessários para encher uma caixa.

Verificar a previsão, construindo a caixa e enchendo-a com cubos.

Desenvolver estratégias para calcular o número de cubos necessários para encher uma caixa.

Comparar o número de cubos necessários para encher duas caixas.

Material necessário:

- Uma cópia da tarefa “Construir caixas” para cada aluno (em anexo)

Para cada par de alunos:

- 5 folhas de papel quadriculado de 2 centímetros, em anexo

- Cerca de 65 cubos de 2 centímetros de aresta. (Se estes cubos não estiverem disponíveis, é necessário garantir que os cubos e a quadrícula escolhida têm a mesma medida)

- Um rolo de fita-cola; Um par de tesouras

Organização da turma

Os alunos trabalham a pares.

Motivação

Apresente aos seus alunos uma situação desafiante, “Suponham que são *designers* de caixas para a empresa de empacotamento *Embal’arte*. Peça para imaginarem que no departamento deles se desenham e constroem caixas sem tampas, dizendo-lhes que serão trabalhadores de outros departamentos a medir as caixas e a fazer as tampas.

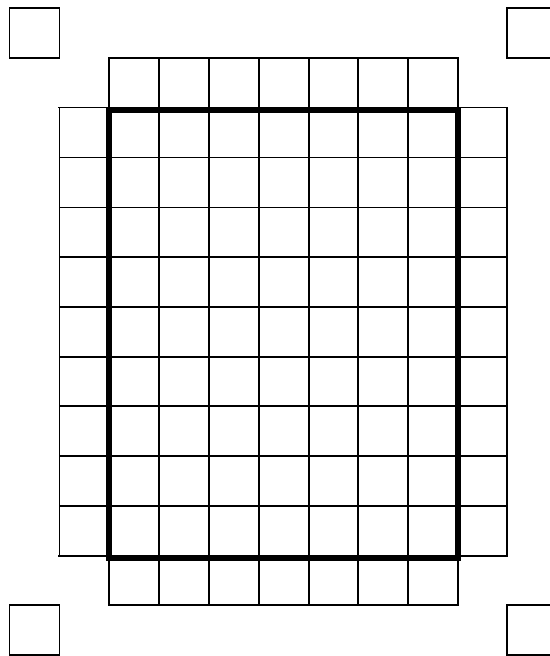
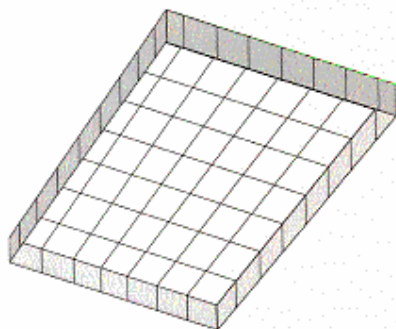
Agrupe os alunos em pares e dê a cada par 5 folhas de papel quadriculado de 2 centímetros. Distribua cópias da tarefa “Construir caixas” para cada aluno. Explique que, trabalhando dois a dois, irão usar o papel para fazer modelos para a empresa. Fique também com 5 folhas para usar na demonstração do processo.

Mostre uma das folhas e corte-a de forma a ficar com um rectângulo de 9 por 11 quadrados.

Segure a folha com o rectângulo e corte um quadrado em cada canto, como mostra a figura. Dobre as bandas para fazer a caixa e cole os cantos.

Mostre a sua caixa aos alunos e diga-lhes para fazerem a primeira caixa seguindo o mesmo processo.

Em seguida, os alunos devem encher a caixa com cubos de 2 centímetros de aresta. Pergunte-lhes de quantos cubos precisam para encher a caixa.



Enquanto os pares constroem a sua primeira caixa e a enchem, observe o que fazem e ouça o que dizem. Que estratégias usam para contar os cubos? Precisam de encher a caixa para saber quantos cubos lá cabem?

Quando todos os pares tiverem terminado a tarefa, deixe que cada par relate as suas descobertas à turma. Pergunte-lhes como é que chegaram ao número de cubos necessários para encher a caixa. Contaram todos os cubos? Contaram o número de cubos da linha de cima e o número de linhas e multiplicaram? Quando os alunos concluírem que são necessários 63 cubos para encher a caixa, já partilharam as estratégias que usaram para chegarem a esse total.

Solicite a ajuda dos alunos para iniciar o preenchimento da tabela. Na linha 1 preencha a informação relativa à caixa 1, dizendo aos alunos que devem preencher correctamente as respectivas fichas de trabalho.

Exploração

Este processo de construção deve ser repetido para as restantes caixas. Aqui é fundamental que o professor exemplifique (por exemplo, para a segunda caixa, mostre o segundo rectângulo e corte um quadrado de 2 por 2 em cada canto), coloque questões (do tipo que a seguir se indicam):

Antes da construção de cada caixa:

Prevêem que precisam de mais ou menos do que na anterior para encher a nova caixa?

Porquê? (*Dê espaço à discussão dos alunos, não os induza a considerar, por exemplo, a influência da mudança da altura no volume da caixa*)

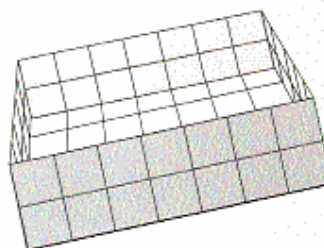
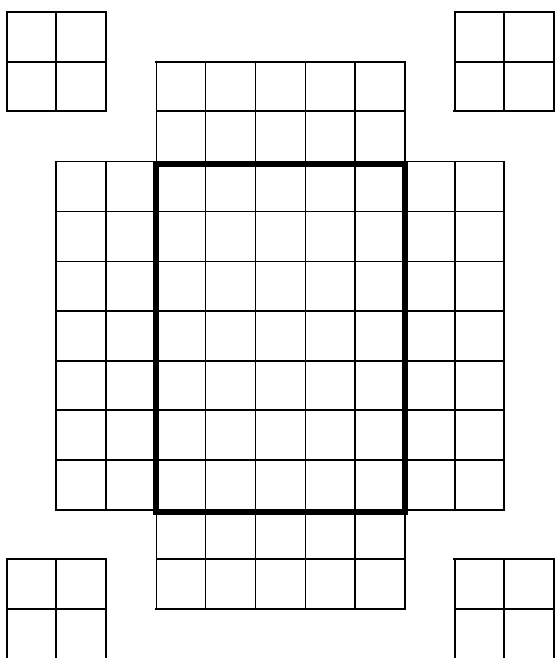
Querem mudar as previsões?

Diga-lhes para fazer as construções e preencher a tabela e depois pergunte:

As previsões estavam certas ou erradas?

Se estavam erradas quais os aspectos da situação que negligenciaram?

Se a previsão foi boa, quais os aspectos que foram considerados?



A discussão das respostas a esta questão pode ajudar a evitar ensinar directamente a fórmula (volume = comprimento x largura x altura) e a ter alunos que a aprendam mecanicamente sem compreender. Se os alunos chegaram à fórmula, isso ajuda-os a ver que apesar de funcionar para os sólidos rectangulares, como as caixas, não os pode ajudar a encontrar o volume de outros sólidos, como o da esfera, por exemplo.

- Os alunos devem identificar um conjunto de padrões:
- O comprimento diminui 2 unidades quando cada canto é cortado.
- A largura também diminui 2 unidades quando cada canto é cortado.
- A altura (número de camadas) aumenta 1 quando cada canto é cortado.
- O número de cubos necessários para encher uma caixa vai ser igual ao número de uma linha de baixo, que os alunos devem ser capazes de definir como comprimento, vezes largura, vezes o número de camadas, que devem ser capazes de definir como altura.

Tabela: *Volumes e áreas das superfícies das caixas construídas*

	Comprimento	Largura	Altura (número de camadas de cubos)	Volume (número de cubos necessários para encher a caixa)	Número total de quadrados cortados do rectângulo	Número de quadrados da grelha final
Quadrado inicial	11	9	0	0	0	99 quadrados
Caixa 1	9	7	1	63 cubos	4 quadrados	95 quadrados
Caixa 2	7	5	2	70 cubos	16 quadrados	83 quadrados
Caixa 3	5	3	3	45 cubos	36 quadrados	63 quadrados
Caixa 4	3	1	4	12 cubos	64 quadrados	35 quadrados
Caixa 5				<i>impossível</i>		

Os alunos começam a compreender que nem sempre é prático encher uma caixa com cubos unitários para determinar o seu volume. As suas investigações podem levá-los à generalização acerca do volume de qualquer prisma rectangular. Devem concluir que podem multiplicar o comprimento pela largura para saber o número de cubos da camada de baixo (a área da base) e que multiplicando o resultado pelo número de camadas (a altura) saberão o volume da caixa. Quando chegarem a esta conclusão, escreva no quadro a fórmula para determinar o volume de qualquer sólido rectangular: *volume = comprimento x largura x altura*, ou *volume = (área da base) x altura*.

Ideias para a avaliação

Para avaliar a compreensão dos alunos enquanto a investigação anote o que os alunos fazem e dizem enquanto constroem as caixas e completam a tabela. Dê particular atenção ao processo de organização dos dados na tabela e aos padrões que os alunos venham a identificar enquanto a preenchem.

Os alunos do 4º e 5º ano podem também demonstrar a sua compreensão se descreverem as descobertas que fizeram. Pode avaliar as respectivas aprendizagens examinando as respostas a questões como as que se seguem:

- “Podem saber quantos cubos cabem numa caixa sem a encher?” (Os alunos podem sugerir usar a fórmula para o prisma rectangular.)
- “Quais serão as dimensões (comprimento, largura e altura) de uma caixa construída a partir de um rectângulo de 10 por 10, cortando um quadrado em cada canto do papel?” (comprimento=8, largura=8 e altura=1).

- “Desenhem a vossa caixa, mostrando as relações entre comprimento, largura e altura o mais exactamente que puderem.”
- “Se cortarem um quadrado de 3 por 3 unidades em cada canto de um rectângulo de 8 por 12 unidades, quantas camadas unitárias a caixa resultante terá?” (3)
- “Como é que sabes que terás essa quantidade de camadas?”
- “Quantos cubos se encaixam na camada de baixo?” ($2 \times 6 = 12$)
- “Desenhem a vossa caixa, mostrando as relações entre comprimento, largura e altura o mais exactamente que puderem.”

Prolongamento das actividades

Ao longo do ano, volte periodicamente a esta actividade, dando aos alunos um número diferente de quadrados unitários, propondo que desenhem todas as caixas possíveis e comparem os volumes. Eles devem fazer tabelas para estas actividades como a tabela na tarefa “Construindo caixas”.

Adaptado de Navigating through Measurement in Grades 3-5, NCTM, 2005

Nível E

Representacional – unidades não estandarizadas:

8. Contar cubos

Material necessário: cubos de madeira ou plástico. Proposta de tarefa a entregar aos alunos

Notas para o professor: Esta actividade deve ser realizada individualmente e os alunos devem contar sem recorrer a modelos concretos. Não esquecer os cubos que estão escondidos mostra um bom desenvolvimento do raciocínio espacial, nomeadamente de algumas capacidades de visualização, representação e abstracção. No entanto, em cada grupo, devem existir cubos disponíveis, para os alunos poderem confirmar o número de cubos, em caso de dúvida, ou de não conseguirem visualizar os que faltam. Apesar de inicialmente ser uma actividade desenvolvida individualmente, os alunos podem estar organizados em grupo, passando por uma fase de comparação e correcção dentro do grupo, antes da discussão em grande grupo. Mas, o trabalho também pode ser realizado individualmente, seguindo-se a discussão colectiva.

Tarefa adaptada da pasta “Materiais para o 1º ciclo” Versão reformulada, caderno 2, APM

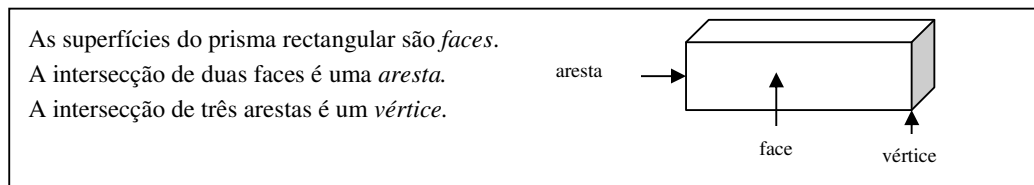
9. Berlindes no sapato – gráfico

A actividade dos “Berlindes no sapato” pode ser ampliada realizando uma representação gráfica.

10. Investigando design de caixas

Pré-requisitos:

- Os alunos devem saber que as dimensões de um prisma rectangular são *comprimento*, *largura* e *altura*, e que o vocabulário para descrever o prisma deve também incluir *face*, *aresta*, *base* e *vértice*. Devem ter trabalhado com planificações de prismas rectangulares e devem ter explorado o *perímetro* e área de formas a 2 dimensões e o *volume* de formas a 3 dimensões.



Prisma rectangular

Objectivos:

- Desenvolver estratégias para determinar a área total de um prisma rectangular
- Distinguir entre o volume e a área de objectos a três dimensões
- Usar planificações em papel quadriculado para relacionar as áreas dos objectos a 3-D com as áreas das formas 2-D
- Determinar, para um volume fixo, a maior e a menor área de um prisma rectangular.

Material necessário:

Para cada par de alunos:

- Cópias das tarefas “Investigando design de caixas”
- Uma cópia da “caixa 1” e “caixa 2”
- Um conjunto de 18 cubos de 2 centímetros de aresta.
- Oito a dez folhas de papel quadriculado de 2 centímetros, de preferência de cores variadas, para caixas distintas).
- Tesoura e um rolo de fita-cola
- Etiquetas
- Marcadores ou lápis de cor
- (opcional) Materiais decorativos (rótulos, brilhantes, etc.)

Organização da turma

Os alunos trabalham a pares.

Motivação

Diga aos seus alunos para imaginarem que são designers de caixas para a empresa de doces *Caramelos e Companhia, Lda*. A *Caramelos e Companhia, Lda* faz caramelos e empacota-os em caixas rectangulares, colocando 12 por caixa, para serem vendidas nas lojas. Mostre alguns cubos com 2 centímetros de aresta (ou outro tamanho), e diga, “Os caramelos têm as mesmas dimensões que estes cubos”.

Não dê as dimensões dos cubos em unidades do sistema métrico. Esta informação pode facilmente confundir os alunos enquanto trabalham. Em vez disso, assegure-se de que fala de cubos que têm uma unidade de aresta. Assim, o volume da caixa de caramelos será fixada em 12 unidades cúbicas e a área total será um número inteiro de quadrados unitários.

Explique que a empresa de doces *Caramelos e Companhia, Lda* pretende caixas cujo tamanho seja apelativo para o consumidor, tornando-se fáceis de transportar, empilhar e armazenar. Sem dúvida, a empresa está a pensar lucrar com isso.

Diga aos seus alunos, “Suponham que o vosso trabalho é examinar todas as opções possíveis de caixas rectangulares e preparar uma apresentação na qual vocês recomendariam uma caixa específica ao grupo director da *Caramelos e Companhia, Lda*.” Diga-lhes que a apresentação deve incluir o modelo da caixa recomendada bem como as razões da escolha.

Imprima as planificações das caixas 1 e 2. Estas planificações são para caixas com o mesmo volume (mas não com 12 unidades cúbicas). Use-as como um seguimento das experiências desenvolvidas na actividade *Construindo caixas*. Corte as planificações. Dobre-as e cole-as com fita para fazer caixas com tampa. Diga que a empresa de doces *Caramelos e Companhia, Lda* não gosta da empresa de empacotamento *Embal'arte*, e quer construir cada caixa com a sua tampa por este processo – tudo numa única peça.

Pergunte aos alunos, “Em que é que as duas caixas são semelhantes?” Quando eles responderem que as caixas levam a mesma quantidade (por outras palavras, que o volume é o mesmo), mude o foco das semelhanças para as diferenças, e pergunte, “Em que é que são diferentes?” Os alunos podem dizer que as caixas têm formas diferentes. Se for assim, incentive-os a desenvolver essa ideia. (Eles podem dizer que uma delas parece mais um cubo do que outra; uma é mais longa do que larga, etc.).

Para continuar a explorar os sólidos, lance agora as questões que envolvem números: “Quais são as dimensões de cada caixa?” As da caixa 1 são 3x3x2 unidades cúbicas, e as da caixa 2 são 6x3x1 unidades cúbicas.) Chame a atenção dos alunos para os modelos das caixas lançando as seguintes questões: “ Se cortarmos a fita-cola e planificarmos as caixas, o que obteremos?”

É preciso definir *planificação* para os alunos. Uma planificação é um padrão a duas dimensões que pode ser dobrado para fazer um modelo de um sólido a três dimensões, tal como uma caixa. Os professores das crianças do jardim de infância até ao 2º ano por vezes descrevem tal padrão para um sólido como uma “capa”, um “revestimento” o que não é uma má ideia.

Mostre as planificações das duas caixas aos alunos cortando a fita e alisando as caixas. Pergunte, “Qual a área que a planificação pode cobrir?” (A planificação 1 é uma cobertura de 42 unidades quadradas; a planificação 2 de 54 unidades quadradas.) Coloque a questão seguinte para os alunos pensarem enquanto trabalham no problema da caixa dos doces: “Como é que a área da planificação está relacionada com a caixa que queres fazer?” Enquanto os alunos trabalham devem concluir que o material necessário para construir a caixa é igual à área da planificação.

Exploração

Dê a cada par de alunos doze cubos, várias folhas de papel quadriculado, tesouras, fita-cola, etiquetas, marcadores e uma cópia da tarefa “investigando design de caixas”. Diga, “No vosso relatório, devem mostrar que exploraram todas as opções e explicar a vossa recomendação. Devem explicar as razões da vossa escolha muito claramente. A vossa apresentação deve incluir o modelo da caixa a 3 dimensões que recomendam.”

Os alunos irão então usar o papel quadriculado e os cubos para descobrir todas as formas possíveis de caixas para 12 caramelos – uma caixa de 12x1x1 (ou 1x12x1 ou 1x1x12), uma caixa de 6x2x1 (ou qualquer outra permutação destes números), uma caixa de 3x2x2 (ou qualquer outra permutação).

Para cada caixa possível os alunos devem fazer uma planificação, cortá-la, fazer as dobras e colar com a fita. (Podem ignorar o que precisam para as abas para manter a tampa da caixa fechada.)

Se for necessário, ajude os alunos a preencher a tabela na proposta de trabalho para eles conseguirem organizar as descobertas e reconhecer padrões (ver a tabela). Os dados da tabela mostram que os números das diferentes caixas estão relacionados com a factorização do 12.

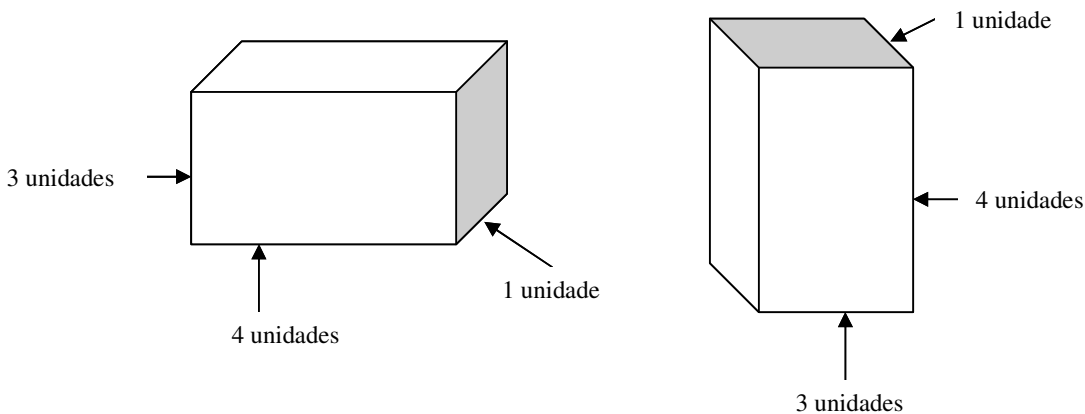
Uma tabela completa

Dimensões da caixa	Volume da caixa	Desenho de uma caixa em papel quadriculado (uma foi mostrada; contudo, existem outras)	Área total da caixa
$12 \times 1 \times 1$	12 cubos unitários		50 quadrados unitários
$6 \times 2 \times 1$	12 cubos unitários		40 quadrados unitários
$4 \times 3 \times 1$	12 cubos unitários		38 quadrados unitários
$3 \times 2 \times 2$	12 cubos unitários		32 quadrados unitários

Quando todos os pares tiverem terminado, resume a actividade reunindo os dados que os alunos recolheram na proposta de trabalho. Esta é uma boa oportunidade para estruturar o processo de recolha e escrita de dados de uma forma organizada. Comece com a caixa de $12 \times 1 \times 1$ e preencha o volume da caixa (12 cubos) e a área da planificação (50 quadrados). Pergunte então, “Encontraram outra caixa que tenha altura 1 com comprimento e largura diferentes para a base?” Continue até obter a lista de todas as caixas de altura 1. Mude para a altura 2, e pergunte se é possível ter uma altura igual a 3.

Este processo levanta inevitavelmente uma questão importante: As duas caixas com dimensões $4 \times 1 \times 3$ e $4 \times 3 \times 1$ são iguais? (ver figura) Esta discussão proporciona uma excelente oportunidade para explorar com os alunos a *orientação* espacial. Veja com eles se a orientação faz ou não diferença para as caixas de caramelos da *Caramelos e Companhia, Lda*.

A orientação da caixa de caramelos pode ser importante para o armazenamento, para empilhar ou para as dispor numa prateleira. Contudo, se os volumes e as áreas totais das superfícies das caixas orientadas de diferentes formas são iguais, eles podem não as considerar diferentes nesta actividade ou no processo de construção de caixas da *Caramelos e Companhia, Lda*.



Uma caixa de 3 x 4 x 1 com duas orientações diferentes.

Pergunte aos alunos que padrões vêm nos dados do quadro. Podem dizer que o volume da caixa é sempre 12 cubos. Podem descobrir que o produto do comprimento, largura e altura da caixa é sempre igual ao volume. Podem observar que os únicos números possíveis para as dimensões das caixas da *Caramelos e Companhia, Lda* são os factores de 12. Deixe que as descobertas matemáticas deles liderem a discussão.

Assegure-se que enfatiza o tipo de unidades usados para representar a área total (unidades quadradas) e o volume (unidades cúbicas). Pergunte, “Porque usam unidades quadradas para a área?” A malha quadriculada oferece uma representação visual excelente dos quadrados que usamos para medir a área. Mostrando os quadriculados, pode acentuar o facto de que a área total é representada pelo número de quadrados que cobrem a superfície da caixa.

Voltando ao volume, pergunte, “porque usam cubos unitários para o volume?”

(Volume é a medida do espaço tri-dimensional, e na actividade representa o número de cubos que preenchem o espaço dentro da caixa.)

Em seguida, os pares de alunos devem fazer apresentações à turma, mostrando os seus modelos e os desenhos dos quadriculados que usaram para determinar a área total. Assegure-se que os alunos explicam porque é que escolheram aqueles desenhos. Podem dar uma variedade de razões para a escolha, tais como elas serão atractivas para os consumidores ou serão fáceis de empilhar nas prateleiras. Deve ter pelo menos um grupo que se tenha focado a área total e escolhido a caixa de 3 x 2 x 2 como a de design de menor custo pois usou o menor material possível.

Para chegar a uma conclusão da actividade, ajude os alunos a articular os conceitos matemáticos que aprenderam acerca do volume e da área.

Para apoiar este processo, pergunte –

- “Que nome dão á medida do número de cubos unitários que são necessários para encher uma caixa?” (Volume)
- “Qual era o volume das caixas com que trabalharam na empresa *Caramelos e Companhia, Lda*?” (12 cubos unitários)
- “Quando é que precisam de encontrar a área total de qualquer coisa?” (Os alunos podem sugerir que podem usar a área para determinar a quantidade de papel de embrulho que precisam para um presente, para determinar a quantidade de papel metálico ou de plástico que precisarão para embrulhar comida, etc.)

Extensão

Deixe os seus alunos observarem de novo as caixas que fizeram para a empresa de doces *Caramelos e Companhia, Lda* e para os dados que organizaram nos quadros. Desafie-os a considerar a relação entre as formas das caixas e a sua área. Pergunte, “O que podem dizer para descrever esta caixa?” (os alunos devem chegar à ideia de que as dimensões das caixas são quase iguais – ou seja, elas estão próximas umas das outras em tamanho. De entre todas as caixas possíveis deve haver uma que é mais parecida com um cubo.)

De seguida, pergunte, “Qual a caixa que tem a maior área total de superfície?” Incentive-os a pensar melhor sobre essa caixa perguntando, “Como é que a podem descrever?” (Ela é longa e estreita; as suas medidas mostram uma grande diferença no tamanho.)

Dê a cada par de alunos mais seis cubos mais folhas quadriculadas e uma cópia da tarefa “Investigando design de caixas – Extensão.” Diga-lhes para imaginarem que a empresa de Doces *Caramelos e Companhia, Lda* mudou os seus planos de marketing e vos pediu para desenharem uma nova caixa que leve 18 caramelos. Devem usar a proposta de actividade para organizarem os dados enquanto investigam as questões que se seguem:

“Quais são as dimensões da caixa que tem a maior área total?” (18 x 1 x 1)

- Porque é que isso é verdade?” (Os cubos estão colocados de forma que fazem a maior superfície para cobrir de uma caixa)
- “Qual é a área total desta caixa?” (74 quadrados unitários).
- “Quais são as dimensões da caixa com a menor área total?” (3 x 3 x 2).
- Qual é a área total desta caixa?” (42 quadrados unitários)

Adaptado de Navigating through Measurement in Grades 3-5, NCTM, 2005

Nível F

Simbólico – unidades não estandarizadas:

11. Investigando design de caixas - exploração das fórmulas

A actividade “Investigando design de caixas” pode ser ampliada incluindo a exploração da fórmula de cálculo do volume.

12. Applet do NCTM sobre ‘Volumes’

O volume de uma caixa é igual ao número de cubos unitários que conseguimos colocar no seu interior.

Quantos cubos unitários precisamos para encher uma caixa de 3 x 5 x 7

E se as medidas da caixa fossem 5 x 7 x 3

Qual o volume da caixa se as medidas fossem 7 x 3 x 5

Em geral, como podes calcular o volume de uma caixa se conheceres a altura, comprimento e largura?

Podes experimentar o **applet** em

<http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=6>

Regras de utilização

1. Clica-se em cima dos lados da caixa para levantá-los ou deitá-los.

2. Para encher a caixa com os cubos ou paralelepípedos, clica-se em cima deles. Cada clique desloca um objecto para dentro da caixa.

Regras de utilização

3. Para retirar o último objecto colocado na caixa, clica-se no botão "**Remove Last**" (Remover o último). Para limpar a caixa clica-se no botão "**Clear**" (Limpar).

4. Para modificar as dimensões da caixa, coloca-se o cursor nos quadrados que correspondem ao **Width** (Largura), **Depth** (Profundidade) e **Height** (Altura) e altera-se os valores. Em seguida, clica-se no botão "**Change Box**" (Mudar Caixa).

Nível H

Representacional – unidades estandardizadas:

13. Mergulhar para medir

Pré-requisitos:

- os alunos devem ter explorado volumes de prismas rectangulares e tido oportunidade de usar medidas métricas para o volume. (Esta actividade pode ser realizada a seguir ao 'construir caixas')

Objectivos:

- Medir o volume de objectos comuns construindo modelos com cubos de aresta 1 ou 2
- Medir o volume em centímetros cúbicos utilizando água
- Ler instrumentos de medida graduados
- Compreender que todas as medidas são aproximações

Material necessário:

- Uma cópia da tarefa "medindo formas engraçadas" para cada par de alunos
- Para cada grupo de 4 alunos :
- 20 ou 30 cubos de 1 cm (ligados ou não)
 - Um conjunto de instrumentos de medida calibrados, tais como provetas ou copos de medição
 - Um recipiente com água, ou arroz
 - Objectos pequenos com formas irregulares que não se estraguem na água. (lápiz, borracha, uma pilha, uma pedra ou uma laranja)

Para o professor:

- Um recipiente de plástico transparente
- Um conjunto de berlindes
- Recipientes medindo um quarto e um litro.

Organização da turma

Os alunos estão agrupados em grupos de 4, mas trabalham a pares no grupo de 4.

Motivação

Arranje um copo ou outro recipiente meio cheio de água. Mergulhe pedras ou berlindes (ou cubos) na água, um de cada vez, e peça aos alunos para descreverem o que acontece quando se deixa cair cada um dos objectos na água. Peça aos alunos para fazerem o mesmo.

Exploração

Explique aos seus alunos que os líquidos no sistema métrico se medem em litros (e submúltiplos e múltiplos do litro). Mostre aos alunos recipientes com um litro. Diga, “se isto é um litro quanto será um mililitro?” Se necessário explique aos alunos que mili é um prefixo que significa mil. Peça-lhes para lhe mostrarem quanto será o ‘tamanho’ de um mililitro relacionado com o litro.

Depois dos alunos terem trocado ideias, diga-lhes que 1 mililitro é igual a 1 centímetro cúbico. Os alunos podem facilmente explorar esta equivalência colocando cubos unitários numa proveta graduada calibrada em mililitros e observando que a água sobe 1 mililitro por cada cubo que se coloque na proveta.

Os alunos devem seguir as propostas apresentadas na tarefa.

Adaptado de Navigating through Measurement in Grades 3-5, NCTM, 2005

Nível I

Simbólico – unidades estandarizadas

14.Cálculo do volume de um aquário

Material: Aquário, régua e papel

Exploração: Peça aos alunos para fazendo as medidas necessárias calcular o volume de um aquário da sala de aula ou da escola.

Sabendo que 1 dm^3 é igual a 1 litro e que um peixe necessita de aproximadamente 1,5 litros para viver, diz quantos peixes podem viver no aquário.

Ideias transversais que o professor deve ter presente na exploração da cadeia:

Após muitas construções de prismas e contagem do número de cubos utilizados, possivelmente alguns alunos concluirão que não necessitam de contar todos os cubos uma vez que eles se repetem por “camadas”

Só depois de muitas experiências **alguns** alunos passarão a usar directamente o produto para calcular o volume:

Desde cedo se devem colocar situações que permitam distinguir área total de volume (ex: construir dois prismas que tenham a mesma área lateral mas em que a altura de um seja o perímetro da base do outro e comparar os volumes/capacidades);

A distinção entre volume e capacidade é complexa. Não é fácil compreender que apesar das medidas serem iguais (embora expressas em unidades diferentes) estamos a falar de conceitos distintos (volume interno versus volume externo, quanto leva versus espaço que ocupa). Nos países anglo-saxónicos esta distinção não é feita.