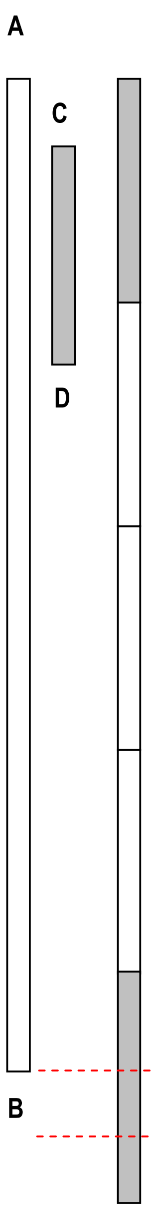
Ampliar o conceito de número

As fracções, conhecidas desde a Antiguidade, surgiram com a necessidade de traduzir o resultado de medições.

Se por exemplo tiver de medir um comprimento $\overline{AB}$ com a unidade $\overline{CD}$, esta pode caber um número inteiro de vezes no comprimento a medir, ou não. Neste caso precisamos de dividir $\overline{CD}$ em partes tais que um certo número dessas partes caiba exactamente na parte que ficou por medir.

Admitamos que a unidade de medida cabia 4 vezes e "mais um bocado" no comprimento $\overline{AB}$. Dividindo a unidade em partes iguais verificávamos que "a terça parte" resolvia a situação. Então a medida de $\overline{AB}$ equivale a 4 unidades e mais $\frac{1}{3}$ ou seja:



$$\overline{AB} = 4\ \frac{1}{3}\ \overline{CD}$$

Durante séculos cada vila ou região tinha as suas próprias unidades de medida. Por exemplo, em Amesterdão um pé era 12 polegares, uma mão, 4 polegares. Logo 3 mãos eram 1 pé. Podemos imaginar as confusões e problemas práticos que esta situação originava, mesmo que os comerciantes usassem tabelas de conversão.

Os Egípcios optaram por medir a partir de uma divisão em duas partes: ½, ¼, 1/8 etc… No entanto, os cálculos, embora baseados nas relações de dobro e metade, não eram muito fáceis.

A ideia de inventar um sistema de medida standard que facilitasse também o cálculo foi progressivamente ganhando força. Lentamente foi-se caminhando para a invenção de sistemas de medida em que as unidades lineares eram subdivididas em 10, 100, 1000... partes iguais.

Esta invenção dá origem aos números decimais. As relações decimais (1 = 10x 0,1; 0,1 = 10 x 0,01, etc.) baseiam-se na divisão repetitiva de 10, originando uma unidade dez vezes mais pequena. Pensa-se que esta escolha de 0,1, 0,01, 0,001 em vez de ½, ¼, 1/8, etc. foi feita por volta 1600.

Os números racionais (expansão do conjunto dos números inteiros através dos números fraccionários), podem ser representados por fracções e equivalem exactamente ao quociente entre quaisquer dois números inteiros (excepto quando o divisor é zero).

Se dividir 12 por 4 obtenho o *número inteiro* 3 que representa exactamente esse quociente;

$$12 \div 4 = 3$$

Se dividir 12 por 5 obtenho a *dízima finita* 2,4 que representa exactamente esse quociente;

$$12 \div 5 = 2{,}4$$

Se dividir 12 por 9 já não consigo obter um *quociente exacto*, pois 1,333333… é uma *dízima infinita* …

Neste caso a fracção $\frac{12}{9}$ possibilita a representação exacta do quociente de 12 por 9;

$$12 \div 9 = \frac{12}{9}$$

Assim, todo o número que se pode representar por meio de uma fracção designa-se por *Número Racional.*

O conjunto dos números racionais [1] é formado pela reunião de dois conjuntos: o dos números inteiros e o dos números fraccionários.

Há uma grande diferença entre o conjunto dos números inteiros e este novo conjunto. Entre dois números inteiros não há "outro" inteiro, mas é fácil perceber que entre dois números racionais fraccionários é possível encontrar uma infinidade de números. Por exemplo, entre $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$ há infinitos números como $\frac{2}{5}$ ou $\frac{14}{33}$ ou, entre 0,1 e 0,2 temos números tais como 0,113 ou 0,16. Por este facto o conjunto dos números racionais é um **conjunto denso.**

No conjunto dos números racionais fraccionários há dois subconjuntos: **os números decimais** e **os números fraccionários não decimais.** Todos os números racionais que se podem representar por uma fracção decimal (cujo denominador é uma potência de 10), ou por uma dízima finita, são *números decimais*, os outros como por exemplo $\frac{2}{3}$ que são representados por dízimas infinitas periódicas, são números *fraccionários não decimais*.

$$\text{Números Racionais} \quad \begin{cases} \text{Números Inteiros} \\ \text{Números Fraccionários} \begin{cases} \text{Números decimais} \\ \text{Números não decimais} \end{cases} \end{cases}$$

[1] Embora neste nível de ensino se trabalhe habitualmente com os números racionais positivos, recorde-se que **o conjunto dos números racionais é formado por números positivos e negativos e representa-se por *Q***.

As dificuldades de compreensão e o cálculo no conjunto dos números fraccionários

A introdução dos números racionais ou dos inteiros relativos é habitualmente uma fonte de dificuldades. Os alunos têm tendência a transferir regras aprendidas nos números inteiros para os outros conjuntos, surgindo-lhes certas regras como estranhas. Por exemplo, muitos alunos não percebem porque podem multiplicar os numeradores e os denominadores e não podem usar o mesmo processo na adição. Outra ideia comum, quando tratam com fracções equivalentes, é observar o numerador e o denominador separadamente mas não a razão entre eles, conduzindo a afirmações como "4/8 é maior do que 2/4". Trata-se de um processo lento e gradual que deve ser orientado para a compreensão e não para um domínio muito rápido de novas técnicas de cálculo.

Erros frequentes dos alunos no conjunto dos números fraccionários decimais:

- ao compararem dois números inteiros, fixam a regra "quanto maior o número de dígitos maior é o número" e depois continuam a aplicá-la para os decimais.

- inventam frequentemente regras próprias, por exemplo, para ordenar decimais, "é menor o número que tem mais algarismos depois da vírgula". A regra é falsa mas conduz a resultados certos em casos como 12,04 < 12,4; no entanto, é falso 12,413 < 12,4 ou 4,25 < 4,1.

- aplicam o algoritmo da ordenação dos inteiros aos números que estão antes da vírgula e aos que estão depois da vírgula, gerando afirmações falsas como "4,15 > 4,5" (pois 15 é maior que 5).

- não percebem que o 0 no fim do número pode 'desaparecer' … e desaparece mesmo quando se usa a calculadora. Como explicar que 15,34 + 2,05 dá 17,39, mas que 15,34 + 2,06 dá 17,4?

- não percebem qual é a diferença entre ter o 0 no fim e 'no meio'? Porque é que se pode tirar o zero de 17,40 e não se pode tirá-lo em 2,05?

O professor pode não se aperceber destas regras implícitas se não proporcionar aos alunos situações em que elas não funcionem e conduzam a erros.

O facto de os alunos terem contacto com números decimais na vida de todos os dias não significa, automaticamente, que tenham uma concepção e compreensão desses mesmos números e do modo que se pode operar com eles. É que falamos de décimas, centésimas ou milésimas. Mas a que é que isso corresponde?

"…A partir do 2º ciclo, é especialmente importante que os alunos percebam que os números têm diversas representações. Este facto é decisivo para que possam resolver uma série de problemas com que são confrontados. Conceitos como **fracção, razão, decimal e percentagem** constituem ideias chave a serem trabalhadas em situações significativas para os alunos e que lhes permitam a passagem de umas representações para outras, das concretas para as figurativas e destas para as simbólicas".

"Os alunos devem **compreender** e **utilizar essas diversas representações** e saber quais as vantagens que oferecem em situações concretas. Reconhecer 30 minutos como 1/2 hora é útil em determinadas situações, assim como reconhecer diferentes escritas simbólicas, como 3/4 = 6/8, 3/4 = 0,75 ou 3/4 = 75%. Por isso, é muito importante que, nesta altura, seja dada particular atenção à apreciação das diversas representações da mesma quantidade, antes mesmo do ensino das técnicas de cálculo que permitem a passagem de uma representação a outra"

Referências:

- Documentos do Programa de Formação contínua em Matemática para professores do 1º ciclo, da ESE de Lisboa e da ESE de Leiria utilizados em 2005/2006;
- Abrantes, Paulo; Serrazina, Lurdes; Oliveira, Isolina, 1999 - "*A Matemática na Educação Básica*"

Tarefa Estruturar (compor e decompor em partes iguais e diferentes)

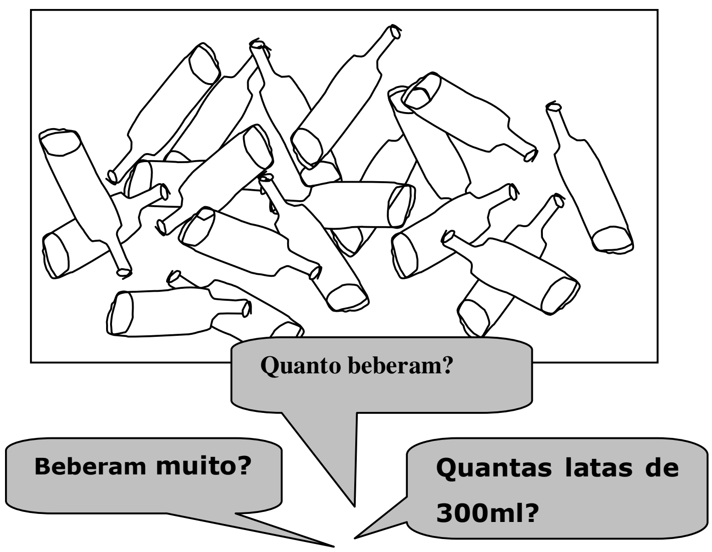
As crianças descobrem as estruturas dos números inteiros e as relações entre esses números formando grupos de objectos, reunindo estes grupos e registando o resultado destas operações. A partir daqui descobrem as possibilidades de usar estas estruturas e relações para simplificar a contagem, as comparações e os cálculos.

Exemplo:

A descoberta da estrutura do 5 permite contar de 5 em 5 e de 10 em 10. Para além disto, também permite comparar 7 a 9 pensando em “5 e o resto” (2 para 7 e 4 para 9) e adicionar facilmente 7 a 9 pensando em (5+2) + (5+4) que é 10 mais 6.

Estruturar (compor e decompor) as grandezas permite, da mesma forma, descobrir as estruturas que desvendam as relações entre os números decimais que usamos com maior frequência assim como as suas relações com os números inteiros.

Exemplo :
A propósito das garrafas vazias que ficam depois de uma festa podem-se colocar várias questões:

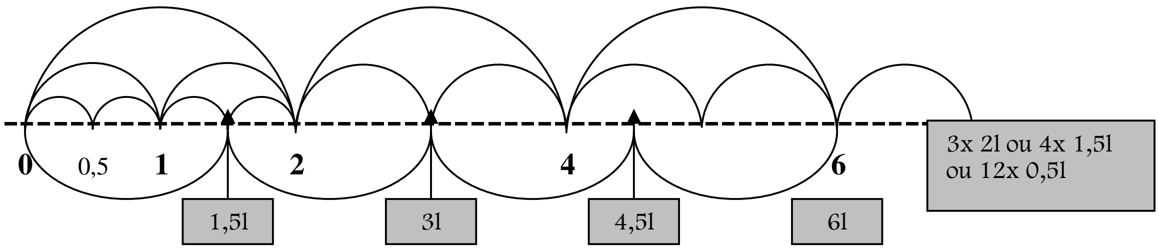


Formar simbolicamente uma tal quantidade utilizando embalagens permite descobrir as estruturas e relações mais evidentes e certas relações mais complexas ligadas às potências de 10 e aos múltiplos de números inteiros.

2 litros
- 2x 1l
- 4x 0,5l
- (1x 1,5l) + (1x 0,5l)l

0,5l
0,5l → 1,5l
0,5l
0,5l

2 litro
1 l → 0,5 l, 0,5 l
1 l → 0,5 l, 0,5 l



Se queremos que as crianças desenvolvam uma certa compreensão e capacidade de cálculo de base será importante relacionar os números decimais uns aos outros, partindo de números que podemos considerar de "referência". Tendo em conta que é importante dar sentido aos números e relações a partir das experiências dos alunos, a decisão sobre os quais os números base – "de referência" - que utilizamos em diferentes contextos são sobretudo:

Equivalência entre os números de referência		
decimais	**fracções**	**percentagem**
0,1 (décima)	1/10	10% (descontos)
0,5 (metade de)	1/2 (metade de)	50%
0,33 (capacidades de algumas latas)	1/3 (um terço de)	33%
0,25 (embalagens de manteiga)	1/4 (um quarto de)	25%
0,125 (embalagens de manteiga)	1/8	12,5%
0,20 (sistema monetário)	1/5	20% (descontos)
0,75 (garrafas de vinho)	¾	75%

Tendo como referência os números anteriores, quais são os tipos de estruturas?

- Divisão repetitiva por 10: 1 → 0,1 → 0,01 → 0,001 (décima, centésima, milésima no contexto de medições)
- Dividir ao meio: 2 x 0,5 = 1 ou 1: 2 = 0,5
- Divisão repetitiva por 2: 1 → 0,5 → 0,25 → 0,125
- Relações do sistema monetário: 1 é 5 x 0,20
- Dividir em 3.

Exemplo:

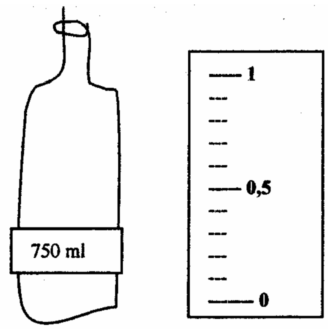
1 euro é

- 5 x 0,20 (5 moedas de20 cêntimos)
- 0,50 + 0,20 + 0,20 + 0,10 (1 moeda de 50 cêntimos, 2 moedas de 20 cêntimos e 1 moeda de 10 cêntimos)
- 10 x 0,10 (10 moedas de 10 cêntimos)
- 100 x 0,01 (100 moedas e 1 cêntimo)
- etc.

Tarefa Localizar e posicionar

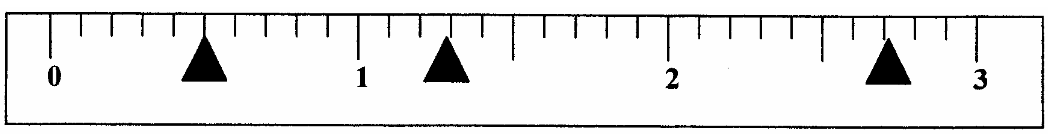
Podemos motivar os alunos para experiências com latas, garrafas, etc. trazidas de casa. A questão é sempre a mesma: até que traço vai subir o nível da água se deitarmos o conteúdo da lata/garrafa no copo medidor.

Exemplo:

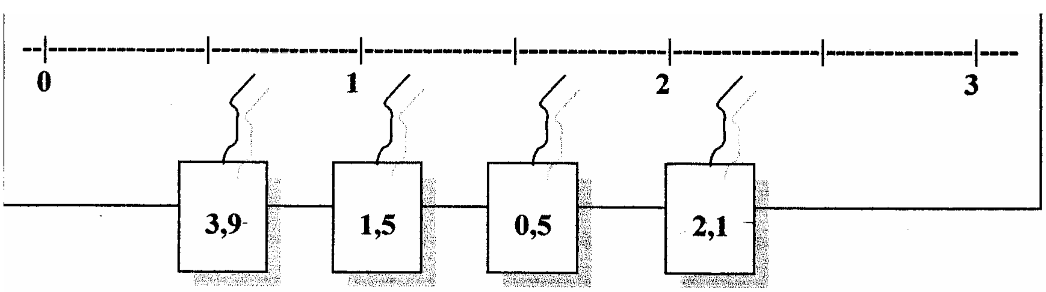


Os manuais propõem exercícios de localização sobre uma linha numérica. Podemos propor aos professores que transformem esses exercícios retirando as marcas intermédias, como no exemplo que se segue:

Escrever os números decimais representados pelo símbolo ∇



Colocar os números nos locais certos



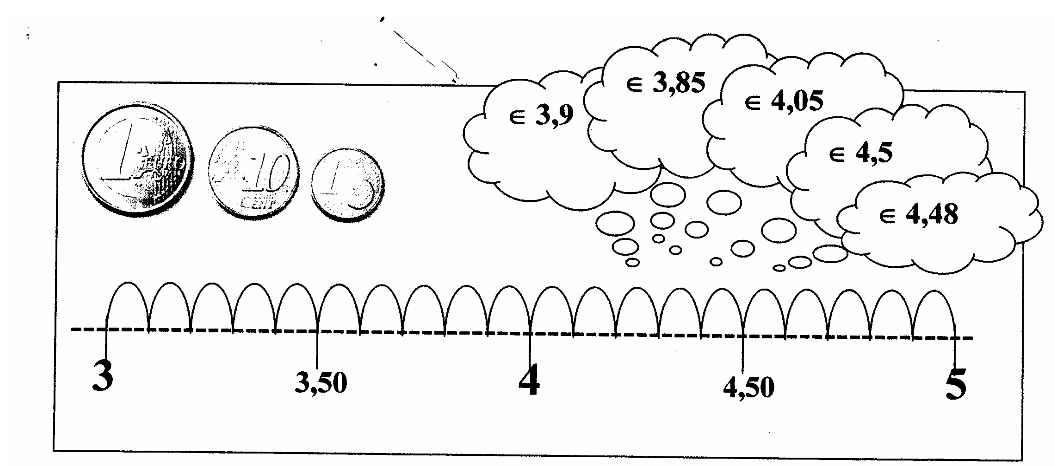
Podemos também propor tarefas que habituem os alunos a raciocinar sem o apoio dos contextos de referência, ou seja, com os números “a seco”.

Por exemplo:

- Colocar 3,15 – 3,5 – 3,09 numa recta numérica marcada com 1/10 da unidade
- Qual é o número mais próximo de 2: 1,95 ? 2,1 ? ou 2,01 ?
- Indica três números maiores do que 3,8 e menores que 4
- Percorres a recta numérica entre 4,5 e 5. Quais são os números que encontras e os que não encontras ? 4,65 – 4,75 – 4,9 – 4,09 – 4,099
- Ver, também, o jogo com a calculadora.

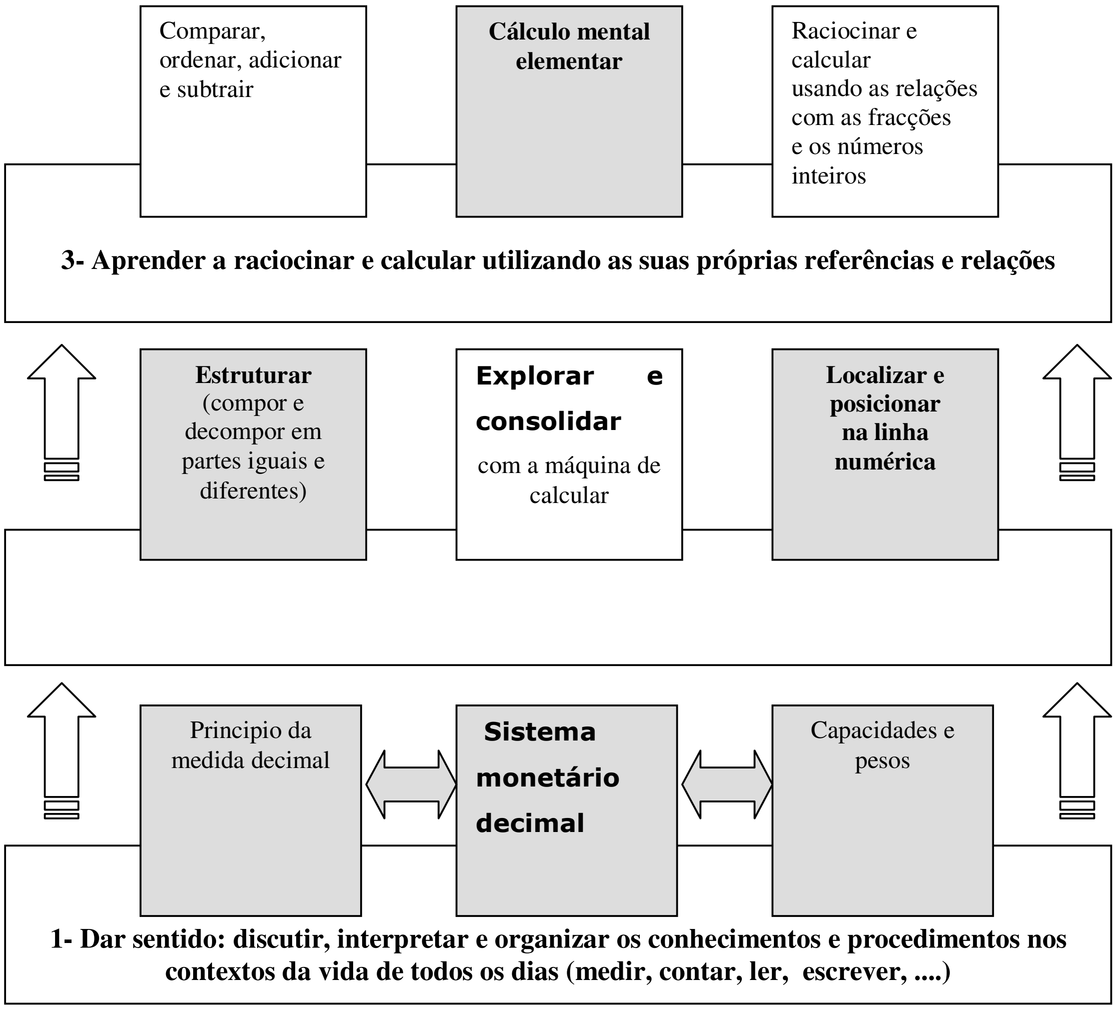
O interesse deste tipo de tarefas é que elas desenvolvem o sentido de ordem de grandeza relativamente aos números decimais. Os alunos tomam consciência de que 2,11 é menor do que 2,9 mesmo que possa parecer o contrário, uma vez que 11 é mais do que 9.

Caminhando de 2,5 a 3 eles apercebem-se, também, que podemos encontrar milhares de números e, simultaneamente, aumentar o número de casas decimais. Isto reforça a ideia de que o número de casas decimais não nos diz nada sobre a grandeza de um número decimal.



Operacionalização da proposta de trabalho

<u>Esquema orientador:</u>



Em grupo:
Analise as tarefas e procure enquadrar cada uma delas nos níveis apresentados no esquema orientador.

Escolha 4 tarefas que visem uma progressão de aprendizagem dos decimais e organize a sequência e a exploração a fazer em cada uma delas.