



## Números e Cálculo

No domínio dos números e do cálculo, a competência matemática que todos devem desenvolver inclui os seguintes aspectos:

---

### Ao longo de todos os ciclos

---

- A compreensão global dos números e das operações e a sua utilização de maneira flexível para fazer julgamentos matemáticos e desenvolver estratégias úteis de manipulação dos números e das operações;
- O reconhecimento e a utilização de diferentes formas de representação dos elementos dos conjuntos numéricos, assim como das propriedades das operações nesses conjuntos;
- A aptidão para efectuar cálculos mentalmente, com os algoritmos de papel e lápis ou usando a calculadora, bem como para decidir qual dos métodos é apropriado à situação;
- A sensibilidade para a ordem de grandeza de números, assim como a aptidão para estimar valores aproximados de resultados de operações e decidir da razoabilidade de resultados obtidos por qualquer processo de cálculo ou por estimação;
- A predisposição para procurar e explorar padrões numéricos em situações matemáticas e não matemáticas e o gosto por investigar relações numéricas, nomeadamente em problemas envolvendo divisores e múltiplos de números ou implicando processos organizados de contagem;
- A aptidão para dar sentido a problemas numéricos e para reconhecer as operações que são necessárias à sua resolução, assim como para explicar os métodos e o raciocínio que foram usados.

Para além dos aspectos gerais comuns a todos os ciclos, há ainda a considerar aspectos específicos para cada um dos três ciclos:

---

### 1.º ciclo

---

- A compreensão do sistema de numeração de posição e do modo como este se relaciona com os algoritmos das quatro operações;
- O reconhecimento dos números inteiros e decimais e de formas diferentes de os representar e relacionar, bem como a aptidão para usar as propriedades das operações em situações concretas, em especial quando aquelas facilitam a realização de cálculos.

---

### 2.º ciclo

---

- O reconhecimento dos conjuntos dos números inteiros e racionais positivos, das diferentes formas de representação dos elementos desses conjuntos e das relações entre eles, bem como a compreensão das propriedades das operações em cada um deles e a aptidão para usá-las em situações concretas;
- A aptidão para trabalhar com valores aproximados de números racionais de maneira adequada ao contexto do problema ou da situação em estudo;
- O reconhecimento de situações de proporcionalidade directa e a aptidão para usar o raciocínio proporcional em problemas diversos;
- A aptidão para trabalhar com percentagens e para compreender e utilizar as suas diferentes representações.



---

### 3.º ciclo

---

- O reconhecimento dos conjuntos dos números inteiros, racionais e reais, das diferentes formas de representação dos elementos desses conjuntos e das relações entre eles, bem como a compreensão das propriedades das operações em cada um deles e a aptidão para usá-las em situações concretas;
- A aptidão para trabalhar com valores aproximados de números racionais ou irracionais de maneira adequada ao contexto do problema ou da situação em estudo;
- O reconhecimento de situações de proporcionalidade directa e inversa e a aptidão para resolver problemas no contexto de tais situações;
- A aptidão para operar com potências e para compreender a escrita de números em notação científica e, em particular, para usar esta notação no trabalho com calculadoras científicas.

*in Currículo Nacional do Ensino Básico*



## 5º ANO

### Números e cálculo

#### **Ampliar o conceito de número e desenvolver o cálculo.**

Os conhecimentos adquiridos no 1º ciclo vão permitir a realização de actividades sugestivas - jogos, problemas relacionados com os interesses dos alunos, com a realidade dum modo geral, com outras disciplinas - que levem os alunos a fazer conjecturas, a querer descobrir, a gostar de Matemática, ao mesmo tempo que contribuem para um melhor conhecimento dos números e das operações, para a descoberta de relações e propriedades, para o desenvolvimento do cálculo mental e das capacidades de estimação.

Eventuais dificuldades de cálculo não devem constituir obstáculo à realização de problemas. Podendo usar a calculadora, os alunos tornam-se mais confiantes e persistentes na procura de estratégias adequadas.

A calculadora, além de auxiliar de cálculo, será instrumento de experimentação e pesquisa.

O conjunto dos números racionais absolutos será introduzido a partir de situações problemáticas que façam os alunos compreender a necessidade de ampliação do universo em que têm trabalhado.

A adição e a subtração de números representados por fracções limitar-se-ão a casos muito simples sem recurso ao cálculo do m. m. c.

A realização de algumas actividades com uma perspectiva histórica ajudará os alunos a compreender a relação entre alguns factos da história da Matemática e problemas que o Homem tem procurado resolver.

Numa perspectiva unificadora devem propor-se situações do âmbito da geometria que sirvam de suporte a actividades numéricas.



## N 1. Números inteiros e números decimais

- Ordenação.

### Operações com números inteiros e números decimais

- Adição, subtração, multiplicação, divisão; propriedades.
  - Potência de expoente natural;
  - Valor exacto e valor aproximado de um quociente. Divisor de um número. Critérios de divisibilidade por 2, 5, 10, 100, 1000;
  - Expressões numéricas.

- Resolver problemas, jogos numéricos que envolvam comparação, enquadramentos, etc., visando um melhor conhecimento dos números.
- Traduzir dados de um problema de uma linguagem para outra (verbal, simbólica, gráfica).
- Resolver problemas ligados à vida real e aos interesses dos alunos utilizando as operações estudadas e conhecimentos de geometria.
- Utilizar propriedades das operações para simplificar o cálculo mental ou escrito e estimar ordens de grandeza de resultados, nomeadamente para criticar um resultado obtido com a calculadora.
- Descrever e discutir estratégias de resolução de problemas.

## N 2. Números racionais

- Frações.
- Comparação e ordenação de números.
- Frações equivalentes.

- Distinguir número inteiro de número fraccionário.
- Comparar e ordenar números racionais representados de diversas formas.

### Adição e subtração de números racionais

- Adição e subtração de:
  - dois números representados por frações com o mesmo denominador, ou com denominadores
  - diferentes sendo um deles múltiplo do outro.
  - dois números, sendo um inteiro e outro fraccionário.

- Resolver problemas simples envolvendo a adição e a subtração de números racionais

## 6º ANO

### Números e cálculo

#### **Ampliar o conceito de número e desenvolver o cálculo.**

O trabalho com números representados por frações será retomado através da resolução de problemas simples, mas diversificados, que permitam consolidar os conhecimentos adquiridos no 5º ano e ampliar o estudo das operações com números racionais.

Embora nesta fase se dê maior relevo ao cálculo com números representados por frações, os alunos devem poder optar, na resolução de problemas, por trabalhar com números escritos nesta forma ou na forma decimal, conforme acharem mais conveniente.

A calculadora continuará a ser usada, quer como instrumento de pesquisa, quer como auxiliar de cálculo.



Os números inteiros relativos serão introduzidos a partir de situações problemáticas que façam os alunos compreender a necessidade da criação de novos números e liguem uma vez mais factos da história da Matemática com problemas que o Homem tem procurado resolver.

O estudo da adição e da subtração limitar-se-á a casos simples e será feito com carácter lúdico, contribuindo assim para desenvolver nos alunos uma atitude positiva face à Matemática. Será através de jogos, da resolução de problemas sugestivos, que os alunos irão descobrir intuitivamente as regras do cálculo.

#### N 1. Operações com números racionais absolutos

- Adição, subtração, multiplicação, divisão; propriedades.
  - Inverso de um número.
  - Potência de expoente natural.
  - Expressões numéricas.
- Operar com números racionais absolutos representados de diversas formas utilizando, sempre que oportuno, propriedades das operações na simplificação do cálculo mental ou escrito.
  - Reconhecer que no conjunto dos números racionais a divisão por um número diferente de zero é sempre possível.
  - Resolver problemas envolvendo números racionais e conhecimentos de geometria, descrevendo e discutindo processos utilizados na resolução de problemas.
  - Traduzir dados de um problema de uma linguagem para outra (verbal, gráfica, simbólica).

#### N 2. Números inteiros relativos

- Representação na recta numérica.
  - Comparação e ordenação.
  - Valor absoluto.
- Interpretar medidas de grandezas com dois sentidos de variação e utilizar números relativos para as representar.

#### Adição e subtração de números inteiros relativos.

- Descobrir, experimentalmente, as regras da adição de números relativos.
- Reconhecer que no conjunto dos números relativos a subtração é sempre possível.
- Resolver problemas simples envolvendo a adição e a subtração de números inteiros relativos

*in Programa de Matemática do 2º ciclo*



## **NÚMEROS E CÁLCULO**

Não é por acaso que ainda hoje associamos a Matemática na escola elementar à aritmética. Durante muito tempo foi tarefa da escola elementar o ensino da aritmética. Saber aritmética correspondia a saber as tabuadas e a saber fazer as contas. Gradualmente, a ideia do que devia ser a Matemática na escola elementar foi-se alargando e hoje considera-se que esta deve compreender, para além dos números e das operações, a medida, a geometria, a estatística e as probabilidades. Por outro lado, como vimos nos capítulos anteriores, a ênfase no raciocínio, na capacidade de resolução de problemas e na aptidão para comunicar matematicamente corresponde a uma orientação fundamental para todos e não apenas para os melhores alunos ou para os níveis de escolaridade mais avançados.

Hoje, os adultos fazem relativamente pouco uso do cálculo escrito, em especial dos algoritmos formais das operações. As calculadoras estão universalmente disponíveis e a preços irrisórios. É claro que continua a ser importante aprender os algoritmos, mas o papel atribuído ao cálculo ao longo da escolaridade deve ser



reexaminado tendo em conta as necessidades actuais e os grandes objectivos do ensino da Matemática. Isto obriga-nos a repensar o ensino e a aprendizagem dos números e das operações.

### **A aprendizagem dos números e do cálculo**

Todos os alunos devem adquirir uma compreensão global do número e das operações a par da capacidade de usar essa compreensão de maneira flexível para fazer julgamentos matemáticos e desenvolver estratégias úteis de manipulação dos números e das operações. Este *sentido do número* — como diversos autores lhe chamam — não é algo que se aprenda de uma vez por todas numa dada fase do percurso escolar dos alunos mas sim uma competência genérica que se desenvolve ao longo de todo o ensino obrigatório e não obrigatório e mesmo ao longo de toda a vida. Com o significado que aqui lhe atribuímos, o sentido do número constitui uma referência central do ensino dos números e do cálculo desde os primeiros anos.

Com efeito, muitas das experiências das crianças e dos jovens envolvem o conhecimento intuitivo do número e das relações numéricas e é com base nestas experiências que os alunos vão construindo os diferentes significados do número e, deste modo, desenvolvendo o sentido do número. Este processo implica um trabalho prolongado que procure ligar as intuições das crianças e a sua linguagem informal às quatro operações e à linguagem matemática, nomeadamente, aos símbolos usados para cada operação. O trabalho exploratório com situações problemáticas, envolvendo objectos físicos e em que é possível “ver” os efeitos das operações, é fundamental para o desenvolvimento do significado destas e para contextualizar a aprendizagem dos procedimentos de cálculo.

O conhecimento dos números e das operações constitui um saber indispensável ao dia a dia dos alunos. Os números estão presentes em múltiplos campos da sociedade actual e são usados não apenas para fazer cálculos ou para representar medidas, mas, também, para localização, para ordenação e para identificação. Ser capaz de estimar o comprimento de determinado objecto ou o número de objectos presentes num determinado contexto é um outro aspecto da utilidade do número no dia a dia. Saber avaliar a razoabilidade de um resultado constitui uma outra competência fundamental.

O ensino dos números e das operações na educação básica não deve visar a aquisição de um conjunto de técnicas rotineiras mas sim uma aprendizagem significativa ligada a uma compreensão relacional das propriedades dos números e das operações. Não basta aprender procedimentos; é necessário transformá-los em instrumentos de pensamento.

### **Aprendizagens iniciais**

O raciocínio informal e intuitivo deve ser privilegiado nos primeiros anos de escolaridade e sempre que um conceito se alarga, porque ajuda os alunos a atribuírem significado à matemática.

Materiais manipuláveis e modelos de representação contribuem para a integração dos processos na rede conceptual, isto é, para uma compreensão consistente. Além disso, facilitam a comunicação, ao permitir que os alunos falem de objectos concretos quando explicam os seus raciocínios. A vivência de experiências, acompanhada de discussão, é extremamente importante para que os alunos vão estabelecendo ligações entre a linguagem oral e os símbolos e vão desenvolvendo a capacidade e o gosto de raciocinar.

A compreensão dos números e do sistema de numeração constitui o alicerce sobre o qual a maioria das capacidades matemáticas é construída. A compreensão da contagem resulta da vivência de muitas experiências onde ela é útil e necessária. Utilizar a contagem para saber quantos elementos tem um conjunto costuma referir-se como encontrar a *cardinalidade* do conjunto. Um outro uso da contagem é para determinar qual o item numa série (primeiro, segundo, terceiro...) que está a ser nomeado, isto é, encontrar a *ordinalidade*.

Um aspecto a considerar no desenvolvimento do sentido do número é a capacidade para reconhecer conjuntos com um pequeno número de elementos sem os contar. À medida que os alunos adquirem experiência com números, esta capacidade pode estender-se a conjuntos de quatro, cinco ou seis elementos. Para além de seis ou sete, é duvidoso que possam identificar o seu número sem os contar, a não ser que estejam dispostos com um arranjo especial.

A noção de que um número pode ser decomposto de diversas maneiras é essencial para a compreensão dos conceitos de adição e subtracção. Neste sentido, uma criança que aprendeu que 9 pode representar-se como  $5+4$ ,  $6+3$ ,  $7+2$  e  $8+1$  está em melhor posição do que outra que não tenha um tal conhecimento. Ser capaz de estabelecer relações entre os diferentes números, bem como relacionar um número com os que lhe estão



próximos (por exemplo, relacionar o 5 com o 6, com o 4, ou com o 3) é também um aspecto essencial do sentido do número.

Os conceitos de base, valor de posição e notação posicional estão interligados e são interdependentes no nosso sistema de numeração. Embora não seja necessário que os alunos sejam capazes de distingui-los dum modo formal, há actividades que contribuem para a sua compreensão. A ideia de base tem a ver com o facto de, quando contamos, fazemos grupos e contamos os grupos, mantendo o número de itens (*base*) que cada um dos grupos contém através do sistema. Qualquer algarismo pode representar um número de elementos ou um número de grupos ou um número de grupos de grupos e, por isso, é possível exprimir qualquer quantidade numérica usando apenas 10 símbolos (os algarismos 0-9). Este facto constitui a ideia fundamental do *valor de posição*. A escrita lado a lado dos algarismos para nos dizer quantos elementos de cada valor de posição nós temos, é o que se costuma chamar a *notação posicional*.

### Operações

Tradicionalmente, a maior parte do tempo da escola era gasto a ensinar os algoritmos das quatro operações (adição, subtração, multiplicação e divisão). Os algoritmos devem continuar a ser ensinados, mas hoje deve dar-se menos atenção à prática repetitiva dos algoritmos e mais atenção à compreensão das operações e das relações entre elas. As propriedades das operações devem ser consideradas em situações concretas, em especial a propósito do seu uso para facilitar o cálculo. Podem, ainda, ser referidas para justificar algoritmos, como é o caso da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição no algoritmo tradicional da multiplicação.

O conhecimento de elementos históricos, relativos aos algoritmos das operações e a outros aspectos como os sistemas de numeração, pode tornar-se muito relevante. Não se trata de divulgar curiosidades mas sim de contribuir para que os alunos vejam a matemática como uma ciência em evolução e compreendam que os métodos e procedimentos matemáticos não foram sempre os mesmos, dependendo das culturas dos diferentes povos e épocas.

Além disso, este tipo de conhecimento pode ajudar a não confundir a operação com um dado algoritmo de cálculo.

Ajudar os alunos a desenvolver estratégias que lhes permitam aprender a tabuada, como forma de facilitar o cálculo mental, o cálculo escrito e a estimação, contribui para que compreendam relações entre os números e raciocinem matematicamente. Esta abordagem requer, aparentemente, mais tempo do que a aprendizagem por simples memorização mas desenvolve competências associadas à investigação, permite a discussão das ideias e a validação das soluções e pode tornar mais significativa a aprendizagem dos algoritmos.

Para os alunos desenvolverem uma melhor compreensão das operações devem ser familiarizados com as diferentes ideias subjacentes a cada uma delas. Por exemplo, a multiplicação e divisão estão relacionadas com a adição e subtração, mas no raciocínio multiplicativo existem novos significados para os números que devem ser apreendidos e novas espécies de relações representadas.

Enquanto o raciocínio aditivo é, normalmente, sobre situações que envolvem acções de juntar ou separar, as situações que conduzem ao raciocínio multiplicativo são diferentes e envolvem mais do que isso.

Por exemplo, na situação “um carro tem 4 rodas, quantas rodas têm 5 carros?”, há um invariante (que não existe no raciocínio aditivo) que é o número de rodas por carro.

Noutros casos, as situações multiplicativas envolvem relações entre variáveis. Por exemplo, “1kg de açúcar custa 180\$00, logo 1/2kg custa 90\$00” envolve um raciocínio que, embora com analogias, é diferente do anterior: os números não se referem a cardinais de conjuntos, mas são valores contínuos, pode falar-se dum factor ou duma terceira variável ligando as duas variáveis (o “preço por quilo” de açúcar).

Há, ainda, outros casos que envolvem situações de partilha e de divisão. Convém notar que, na verdade, existem dois tipos de divisão: a divisão inteira com resto e a divisão como operação inversa da multiplicação. Na primeira, a cada par de números corresponde outro par de números, enquanto, na segunda, a um par de números corresponde um número. Problemas e contextos diversos implicam diferentes tipos de divisão, como se pode ver no exemplo: “A escola da Rita vai organizar uma visita de estudo às gravuras de Foz Côa. Inicialmente foram alugados 6 autocarros de 56 lugares para transportar professores e alunos, mas, afinal, houve 501 inscrições. Quantos autocarros são, então, necessários?”.

Conexões entre as operações proporcionam novas formas de pensar. Por exemplo, quando um aluno tem de responder à pergunta “Quantas rodas têm 8 triciclos?”, pode contar todas as rodas, pode aplicar a adição repetida ( $3+3+3+\dots$ ), pode fazer quatro grupos de dois triciclos cada ( $6+6+6+6$ ) ou pode aplicar a multiplicação



( $8 \times 3$  ou  $4 \times 6$ ). Estas soluções reflectem maneiras diferentes de pensar sobre o problema, assim como graus diferentes de preocupação com a eficácia da resolução.

A relação entre uma operação e a sua inversa é outra conexão que pode proporcionar diferentes maneiras de pensar sobre um problema. Por exemplo, para calcular  $480:8$ , um aluno pode pensar na situação como  $8x? = 480$ , em vez de o fazer em termos de divisão.

Isto não significa que não saiba fazer a divisão, mas, antes, que sabe a relação inversa entre a divisão e a multiplicação e que prefere resolver o problema dessa forma.

Para compreender a relação entre as operações é essencial perceber bem cada uma delas. Por exemplo, dividir por 5 é o mesmo que multiplicar por 2 e dividir por 10. Estas relações aumentam à medida que se passa das operações nos números inteiros para os racionais. Por exemplo, multiplicar por 0,1 é equivalente a dividir por 10 ou dividir por 0,1 é o mesmo que multiplicar por 10.

Além disso, estas relações aumentam, também, à medida que os alunos contactam com novas operações ao longo dos 2º e 3º ciclos. De facto, os alunos precisam de conhecer a potenciação e a radiciação e entender a raiz quadrada como uma operação inversa da potenciação de expoente 2. O domínio do algoritmo da raiz quadrada, que outrora fez parte dos programas escolares, não faz sentido hoje — o cálculo faz-se com a calculadora ou, em casos simples, mentalmente — mas é essencial saber que calcular  $\sqrt{n}$  significa encontrar o número (ou números) que, elevado ao quadrado, dá  $n$ .

### ***Alargamento do conceito de número***

Um dos conjuntos numéricos com que muitos alunos têm dificuldade em lidar é o dos denominados números decimais.

Segundo a investigação, a origem de alguns erros pode estar na forma como se introduzem estes números. Por exemplo, é habitual que os decimais apareçam pela primeira vez ligados a questões de medida. Neste caso basta mudar a unidade para que desapareça a vírgula, que só serviu para disfarçar um número inteiro: se um dado comprimento mede 1,23m, basta expressá-lo em centímetros para já não se tratar de um número escrito com vírgula.

Acontece, por exemplo, que os alunos, ao compararem dois números inteiros, fixam a regra “quanto maior o número de dígitos maior é o número” e depois continuam a aplicá-la para os decimais.

O desenvolvimento dos conceitos de ordem e de equivalência, que se inicia no 1º ciclo, deve ser promovido pela manipulação de materiais, com o uso de modelos figurativos e ligados a situações do mundo real, através de explorações acompanhadas da descrição das experiências com a utilização da linguagem oral em conjunto com o uso de símbolos.

Os alunos inventam frequentemente regras próprias que podem ser erradas mas que permitem obter resultados correctos em casos particulares. Por exemplo, para ordenar decimais, “é menor o número que tem mais algarismos depois da vírgula”. A regra é falsa mas conduz a resultados certos em casos como  $12,04 < 12,4$ ; no entanto, é falso  $12,413 < 12,4$  ou  $4,25 < 4,1$ . Um outro exemplo é a aplicação do algoritmo da ordenação dos inteiros aos números que estão antes da vírgula e aos que estão depois da vírgula, gerando afirmações falsas como “ $4,15 > 4,5$ ” (pois 15 é maior que 5). O professor pode não se aperceber destas regras implícitas se não proporcionar aos alunos situações em que elas não funcionem e conduzam a erros.

Estudos realizados nesta área mostram a existência de diferentes níveis de compreensão, podendo acontecer que os alunos utilizem correctamente os números decimais em situações concretas e familiares, por exemplo de medida, mas apresentem lacunas no seu domínio. A aprendizagem dos números decimais não se reduz a conhecer nomes e algumas regras de cálculo, mas envolve a interiorização de uma cadeia complexa de relações, na própria estrutura do valor de posição (por exemplo, 0,3 é equivalente a 0,30), a ligação a outros conceitos como o de fracção, alguma visualização e a conexão com situações do mundo real. Por isso, a aprendizagem deve envolver a exploração de situações com materiais concretos e modelos visuais, como os modelos de áreas, num processo a desenvolver ao longo dos vários ciclos do ensino básico.

A partir do 2º ciclo, é especialmente importante que os alunos percebam que os números têm diversas representações. Este facto é decisivo para que possam resolver uma série de problemas com que são confrontados. Conceitos como fracção, razão, decimal e percentagem constituem ideias chave a serem trabalhadas em situações significativas para os alunos e que lhes permitam a passagem de umas representações para outras, das concretas para as figurativas e destas para as simbólicas. Os alunos devem compreender e utilizar essas diversas representações e saber quais as vantagens que oferecem em situações concretas. Reconhecer 30 minutos como  $1/2$  hora é útil em determinadas situações, assim como reconhecer

diferentes escritas simbólicas, como  $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$ ,  $\frac{3}{4} = 0,75$  ou  $\frac{3}{4} = 75\%$ . Por isso, é muito importante que, nesta altura, seja dada particular atenção à apreciação das diversas representações da mesma quantidade, antes mesmo do ensino das técnicas de cálculo que permitem a passagem de uma representação a outra.

As situações a explorar devem fazer sentir a necessidade de números para além dos números inteiros que já conhecem (por exemplo, quando se pretende dividir duas tartes por sete pessoas).

Neste aspecto, o recurso a episódios significativos da história da matemática e o conhecimento das crises que foram levando à criação de novos conjuntos numéricos pode desempenhar um papel formativo essencial.

A introdução dos números racionais ou dos inteiros relativos é habitualmente uma fonte de dificuldades. Os alunos têm tendência a transferir regras aprendidas nos números inteiros para os outros conjuntos, surgindo-lhes certas regras como estranhas. Por exemplo, muitos alunos não percebem porque podem multiplicar os numeradores e os denominadores e não podem usar o mesmo processo na adição. Outra ideia comum, quando tratam com fracções equivalentes, é observar o numerador e o denominador separadamente mas não a razão entre eles, conduzindo a afirmações como “ $\frac{4}{8}$  é maior do que  $\frac{2}{4}$ ”.

A visualização, através de modelos figurativos, assim como a contextualização dos cálculos e a valorização de diversas estratégias na sua execução, pode ajudar a atribuir sentido às diversas acções e a desenvolver uma compreensão conceptual e uma destreza consciente do cálculo. Além disso, este trabalho deve conduzir ao domínio de técnicas que facilitem a estimação e o cálculo mental. Acresce que as possibilidades oferecidas pelo uso das calculadoras e dos computadores permitem deslocar a ênfase atribuída ao cálculo de rotina para a necessidade dos alunos experimentarem e criarem diferentes procedimentos, perceberem como podem usá-los e serem capazes de interpretar os resultados.

A ampliação do conceito de número é um dos aspectos centrais do desenvolvimento da competência matemática dos alunos ao longo da educação básica. A partir do 2º ciclo, a aprendizagem dos números racionais (positivos) e, posteriormente, dos números relativos (inteiros, racionais, reais) está, normalmente, associada a dificuldades a que é necessário dar a maior atenção. Os alunos precisam de compreender que tipos de problemas deram origem à criação de novos conjuntos numéricos e como se relacionam estes conjuntos com aqueles que já conheciam. A história da evolução do conceito de número, incluindo os aspectos humanos a ela ligados, ajuda os alunos a compreender essa evolução e pode contribuir para que apreciem a matemática.

Trata-se de um processo lento e gradual que deve ser orientado para a compreensão e não para um domínio muito rápido de novas técnicas de cálculo. De outro modo, o efeito é acentuar a tendência para a memorização de regras que são muitas vezes aplicadas em situações inadequadas, chegando a suceder que os alunos se confundem em cálculos que já pareciam dominar. Por exemplo, após a introdução dos números relativos, e no meio de outras expressões, hesitam ou erram no cálculo de  $7-3$ , que já faziam desde os primeiros anos de escolaridade; ou então, memorizando regras da multiplicação do tipo “menos por menos dá mais”, usam-nas para adicionar, cometendo erros que seriam impensáveis na semana anterior.

Ao nível do 3º ciclo, é importante que os alunos saibam efectuar as operações nos novos conjuntos numéricos com que contactaram, assim como usar as potências e, em particular, a escrita de números em notação científica. Nestes aspectos, utilizar adequadamente uma calculadora científica é também importante.

Além disso, os alunos devem distinguir e saber representar de várias formas os números inteiros, os racionais e mesmo (na fase final do ciclo) os reais. Essa compreensão deve ir além do conhecimento de quais são aqueles que se podem escrever na forma de fracção ou dos tipos de dízimas que lhes correspondem. Saber trabalhar com valores aproximados e perceber que, ao contrário do que se passa com os inteiros, entre dois números racionais existe sempre outro, são competências desejáveis neste nível. Porém, é preciso ter-se a noção de que se está a lidar com ideias que não são simples, sobretudo quando se lida com os números reais. Os alunos têm experiência de trabalhar com alguns destes números (como  $\pi$  ou  $\sqrt{2}$ ) e podem adquirir sensibilidade para a continuidade do respectivo conjunto, nomeadamente através da sua identificação com a recta. Mas convém ter presente que estes aspectos, que têm a ver com a noção de infinito, serão aprofundados em eventuais estudos posteriores.

### **Padrões e regularidades**

O estudo de padrões e regularidades é central em matemática e, naturalmente, actividades envolvendo padrões e regularidades atravessam o currículo dos três ciclos de educação básica. O campo dos números é propício a este tipo de actividades, as quais contribuem para desenvolver o raciocínio e estabelecer conexões entre as diversas áreas da matemática. Sempre que possível, os alunos devem envolver-se em actividades de natureza exploratória e investigativa, com a possibilidade de explicar e justificar os seus processos de pensamento ou as

suas soluções. Ao longo do ensino básico há imensas oportunidades para o fazer, desde o trabalho com as dízimas às situações que envolvem os números primos, os divisores e os múltiplos de diferentes números. Também a exploração dos números triangulares, quadrados, pentagonais, etc., gera ambientes propícios ao desenvolvimento de atitudes características da actividade matemática como formular e testar conjecturas, apresentar justificações e fazer generalizações. Nos primeiros anos de escolaridade os alunos podem criar padrões partindo de materiais que manipulam, em que se apercebem das relações existentes que descrevem e representam, usando esquemas e desenhos. Estão, deste modo, a desenvolver o raciocínio analítico e espacial. Actividades muito estimulantes podem ser, por exemplo, a observação e a procura de regularidades em desenhos, em conjuntos de números ou em formas, bem como a sua descrição oralmente ou por escrito e, ainda, a descoberta da relação entre uma sequência de figuras geométricas e a respectiva sequência numérica. A exploração das sequências numéricas, trabalhadas desde os primeiros anos, vai sendo ampliada, constituindo uma introdução à ideia de variável quando os alunos usam letras ou outros símbolos na descrição das relações. Nesse contexto, pode surgir a oportunidade para a descoberta de relações entre variáveis e para a sua representação por meio de tabelas. Deste modo, está-se a desenvolver o raciocínio e as ideias algébricas. Diferentes relações podem ser descobertas numa mesma sequência. É o que acontece quando se explora, por exemplo, o triângulo de Pascal: os alunos podem pensar em descobrir uma regra para obter uma nova linha do triângulo ou prever a soma dos números da 30ª linha do triângulo ou da linha de ordem  $n$ . No contexto da resolução de problemas, a procura de regularidades é uma estratégia a desenvolver, como no caso em que se procura descobrir quantos apertos de mão são dados na turma, se cada aluno der um aperto de mão a cada um dos seus colegas. Este tipo de problemas pode estar associado a várias representações e ajudar a estabelecer conexões entre diversas ideias envolvendo, por exemplo, os números triangulares e as diagonais de um polígono. Nas actividades de generalização a calculadora pode revelar-se muito útil, nomeadamente, quando é preciso efectuar grande quantidade de experiências e de cálculos ou quando se procuram contra-exemplos para conjecturas que se pretendem refutar.

### **Razão e proporção**

O conceito de razão, que envolve uma relação entre duas quantidades e não é directamente uma medida, não é fácil de entender para muitos alunos. Diversas investigações mostram como a sua construção se faz lentamente, com níveis de funcionamento cognitivo progressivos, e muito interligada ao domínio de outros mecanismos construtivos como a partição e a equivalência.

A utilização de razões surge numa variedade de situações, desde as mais simples, como achar o dobro ou a metade, até outras que implicam multiplicar por um número inteiro, determinar o valor correspondente a um dado número de unidades conhecendo um valor constante para cada unidade, calcular um valor por unidade e depois aplicá-lo, ampliar um desenho e usar percentagens.

Os alunos devem aperceber-se da importância da ordem dos elementos na razão e compreender a sua natureza multiplicativa, tomando consciência de que, por exemplo, as medidas  $\frac{3}{4}$  e  $\frac{6}{8}$  de uma unidade representam a mesma quantidade. No entanto, uma receita com 3kg de farinha e 4kg de açúcar é diferente de outra com 6kg de farinha e 8kg de açúcar, embora se mantenha a proporção entre os ingredientes.

A compreensão dos conceitos de razão e de proporção é de uma importância crucial, quer numa perspectiva prática, porque permite desenvolver a capacidade de lidar com diversas situações do mundo real, quer numa perspectiva psicológica, porque fornece um campo no qual os alunos podem expandir processos mentais necessários ao seu desenvolvimento cognitivo. Por outro lado, a compreensão destes conceitos está interligada e na base de outros como as fracções, a semelhança de figuras e as razões trigonométricas. Além disso, constituem um elemento fundamental para a apreensão de conhecimentos em várias áreas do saber, como a física, a geografia e as artes.

Segundo alguns autores, o raciocínio proporcional está presente em diferentes tipos de problemas que envolvem comparações, razões, conversões e combinações. Nas situações de proporcionalidade, podem ser usados diferentes procedimentos que recorrem à redução à unidade, à equivalência de fracções ou às equações. A multiplicidade de situações e a variedade de procedimentos constituem uma fonte de dificuldades conceptuais.

A investigação concluiu que, por vezes, os alunos utilizam um tipo de raciocínio errado que interpreta a ampliação como a adição de uma quantidade fixa. De facto, os métodos espontâneos de muitos alunos tendem a ser inicialmente não-multiplicativos, normalmente sugeridos por um padrão numérico (por exemplo, 3, 6, 9) ou recorrendo a uma estratégia aditiva. Tais métodos permitem-lhes obter resultados correctos em casos simples



mas não em situações mais complexas. Compreender estes métodos espontâneos e tomá-los como ponto de partida para promover a reflexão dos alunos em confronto com novas situações pode ser uma estratégia adequada para que desenvolvam um raciocínio correcto.

## Capacidades a desenvolver

### **Compreensão global do número e das operações**

A compreensão do sistema indo-árabe de numeração, do valor de posição e dos números racionais, nomeadamente, o reconhecimento de diferentes formas de os representar, ajudam o aluno a organizar mentalmente, a comparar e a ordenar números.

Os números aparecem em diferentes contextos e podem ser expressos através de várias representações gráficas e/ou simbólicas.

Não basta saber que 35 é o mesmo que 3 dezenas e 5 unidades, ou 2 dezenas e 15 unidades; é importante também ver 35 como o produto de dois ímpares consecutivos,  $5 \times 7$ , ou como o número anterior a um quadrado perfeito,  $35 = 6^2 - 1$ , ou ainda como o produto da soma de dois números pela sua diferença,  $35 = (6+1) \times (6-1)$ , ou metade de 70,  $35 = 70/2$ . Para desenvolver a competência matemática, é essencial o conhecimento de que os números podem ser representados de muitas formas e que algumas são mais úteis que outras em determinadas situações ou problemas.

Reconhecer o valor relativo de um número ou quantidade em relação a outro número, assim como, ter sensibilidade para a ordem de grandeza de um dado número, são capacidades que devem ser desenvolvidas ao longo da aprendizagem da matemática.

A compreensão conceptual de uma operação implica analisar os seus efeitos nos vários conjuntos numéricos, incluindo os inteiros e os racionais e, mais tarde, os reais. Por exemplo, ao conceber a multiplicação apenas como uma adição repetida de números naturais, muitos alunos fazem generalizações erradas como “a multiplicação dá sempre um número maior”. Modelos como a recta numérica ou as disposições rectangulares podem ser interessantes para que os alunos vejam a multiplicação em outros contextos.

Com efeito, perceber de que modo a variação da ordem de grandeza dos factores influencia o produto é uma forma de desenvolver o sentido do número. Por exemplo, o que acontece se um dos factores é menor que 1, ou se os dois factores são menores que 1?

### **Uso da compreensão do número e das operações de maneira flexível para fazer julgamentos matemáticos**

Resolver problemas que envolvem raciocínios com números implica uma diversidade de acções: decidir que tipo de resposta é adequada (exacta ou aproximada), decidir que instrumento de cálculo é adequado e/ou acessível (calculadora, cálculo mental, algoritmos), escolher uma estratégia, aplicar a estratégia, rever os dados e os resultados para avaliar a sua razoabilidade e, se necessário, repetir os passos anteriores utilizando uma estratégia alternativa.

Este processo envolve diversos tipos de decisão. Primeiro, requer compreender a relação entre o contexto do problema e o cálculo necessário. Segundo, exige um conhecimento de um leque de possíveis estratégias para realizar o cálculo e seleccionar a mais adequada. Finalmente, inclui ser capaz de rever a resposta e verificar tanto a sua correcção como a sua relevância no contexto original do problema.

### **Domínio de estratégias úteis de manipulação dos números e das operações**

O sentido do número implica o reconhecimento de que são possíveis múltiplas estratégias de solução para um determinado problema. Quando uma estratégia inicial parece não conduzir a nada, recomeçar com uma nova estratégia pode ser a solução. A tendência para prosseguir na resolução de um problema explorando vários caminhos permite a comparação entre diferentes métodos. Esta reflexão metacognitiva nem sempre é fácil de identificar porque ocorre rapidamente e, muitas vezes, não ao nível do pensamento consciente.

A consciência de que, numa dada situação, algumas estratégias e/ou instrumentos de cálculo são mais eficazes que outros é também um indicador do sentido do número. Para calcular  $8+7$ , um aluno pode contar um a um, enquanto outro pode escolher um método de recomposição que usa mentalmente (por exemplo,  $7+7+1$  sabendo que  $7+7$  são 14, ou  $8+2+5$  sabendo que  $8+2$  são 10).



Os alunos com sentido do número, quando chegam a uma solução, analisam-na à luz do problema original (considerando quer os dados do problema, quer a pergunta), para concluir se a sua resposta “faz sentido”. Se esta reflexão é feita rápida e naturalmente, torna-se uma parte integrante do processo de resolução do problema.

Esta revisão metacognitiva do contexto do problema pode envolver uma avaliação da estratégia usada e, ainda, uma verificação para determinar se a resposta produzida foi a adequada. Os alunos omitem frequentemente esta verificação porque o resultado (e portanto o problema) não é importante para eles.

A aquisição de destrezas de cálculo mental promove o desenvolvimento da compreensão numérica, uma vez que encoraja a procura de processos mais fáceis baseados nas propriedades dos números e das operações. Os algoritmos mentais têm algumas características interessantes: (1) são variáveis (para calcular  $83-26$  as crianças utilizam diferentes algoritmos); (2) são flexíveis e podem adaptar-se conforme os números em causa (por exemplo,  $83-79$  e  $83-51$  serão calculados de modos diferentes); (3) são activos, permitindo ao utilizador escolher um método, conscientemente ou não; (4) são holísticos, no sentido em que lidam com os números como um todo e não com dígitos separados; (5) começam frequentemente com o primeiro número (por exemplo,  $37+28$  é  $37$ ,  $47$ ,  $57$ ,  $67$ ,  $65$ ); (6) exigem sempre compreensão e o seu uso desenvolve compreensão; (7) dão uma aproximação inicial da resposta porque os dígitos da esquerda são considerados primeiro.

### ***Utilização do raciocínio proporcional***

Diferentes autores consideram que a característica essencial do raciocínio proporcional é que este raciocínio deve envolver uma relação entre duas relações (isto é, uma relação de segunda ordem), em vez de, simplesmente, uma relação entre dois objectos concretos.

Esta capacidade, que se vai desenvolvendo ao longo da educação básica, inclui a decisão sobre que tipo de relação numérica se aplica (proporcionalidade directa, proporcionalidade inversa, raciocínio aditivo ou outra), a decisão sobre as operações a realizar e, ainda, a execução destas.

A compreensão da relação de proporcionalidade implica que o aluno seja capaz de usar as estratégias multiplicativas (reconhecer uma relação multiplicativa entre os termos de uma razão e aplicar aos termos da segunda ou reconhecer uma relação multiplicativa entre os termos correspondentes de duas razões que se alarga aos outros dois termos correspondentes). Os casos que correspondem a acréscimo ou decréscimo simultâneo dos termos de uma fracção ou razão são os que exigem uma compreensão funcional do conceito de proporcionalidade directa.

No sentido de contribuir para o desenvolvimento deste tipo de raciocínio, os alunos devem experienciar situações que envolvam a investigação de alterações e da direcção dessas alterações, em operações de natureza aditiva e multiplicativa. Por exemplo, é importante perceberem que a alteração de 2 para 6 pode ser definida de forma aditiva ou multiplicativa e que a mesma relação aditiva se mantém quando se obtém 19 a partir de 15, mas o mesmo não se verifica para a multiplicação.

Aos alunos devem ser dadas oportunidades de trabalhar com situações problemáticas envolvendo o raciocínio proporcional, começando por casos em que podem lidar com materiais concretos e esquemas. As situações devem ser de natureza geométrica e numérica. A semelhança de figuras e as escalas podem dar origem a boas situações de aplicação do raciocínio proporcional, permitindo relacioná-lo com o raciocínio espacial.

A capacidade de utilizar o raciocínio proporcional corresponde a uma fase importante do desenvolvimento cognitivo, por ser um ponto culminante das aprendizagens da matemática no ensino elementar e uma base fundamental para o estudo da matemática no ensino secundário.

### ***Uso dos números e de métodos quantitativos como um meio de comunicação e de resolução de problemas***

O sentido do número desenvolve-se gradualmente como resultado de explorar números, visualizá-los numa variedade de contextos e relacioná-los de formas não limitadas aos algoritmos tradicionais. Os alunos com sentido do número são capazes de utilizá-los nas mais variadas situações, como resultado de contagens, como medidas, como localização, identificação e ordenação. Além disso, são capazes de usá-los nas operações e em situações envolvendo proporcionalidade.

Podemos dizer que os alunos com sentido do número desenvolveram significados para os números e para as relações numéricas, reconhecem a sua grandeza relativa e os efeitos das operações sobre os números, tendo



desenvolvido referentes para as quantidades e para as medidas. Deste modo, são capazes de interpretar criticamente o resultado de um problema, verificar a sua razoabilidade e interpretá-lo à luz dos dados disponíveis.

A competência matemática no domínio dos números implica utilizá-los como instrumentos de formulação e resolução de problemas e de comunicação de ideias. Na perspectiva em que nos colocamos, o sentido do número está ligado ao desenvolvimento de hábitos de pensamento matemático, em especial de uma atitude investigativa que implica o gosto e a predisposição para formular questões, explorá-las, fazer e testar conjecturas, produzir e comunicar argumentos.



## Normas para Números e Operações para os Níveis do Pré-escolar ao 8º ano

### Expectativas

Os programas de ensino, desde desde o pré escolar ao 12º ano devem habilitar todos os estudantes para –	Desde o pré escolar até ao 2º ano todos os alunos devem -	Nos níveis 3-5 os alunos devem -	Nos níveis 6-8 os alunos devem -
<p>Compreender números, modos de representar números, relações entre números, e sistemas de numeração.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• contar com compreensão e reconhecer "quantos são" em conjuntos de objectos;</li> <li>• usar múltiplos modelos para desenvolver a compreensão inicial de valor de posição no sistema de numeração de base dez;</li> <li>• desenvolver a compreensão da posição relativa e magnitude de números inteiros e de números ordinais e cardinais e as suas conexões;</li> <li>• desenvolver o sentido de número inteiro e a sua representação e usá-lo de modo flexível e incluindo relacionar, compor, e decompor números;</li> <li>• associar "palavras" de números e numerais às quantidades que eles representam, utilizando vários modelos físicos e representações;</li> <li>• entender e representar fracções vulgarmente usadas, como <math>1/4</math>, <math>1/3</math>, e <math>1/2</math>.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• reconhecer representações equivalentes para o mesmo número e gerá-los decompondo e compondo números;</li> <li>• desenvolver a compreensão de fracções como partes de um todo -a unidade, como partes de uma colecção, como localizações em rectas numéricas e como divisões de números inteiros;</li> <li>• usar modelos, comparações e formas equivalentes para avaliar o tamanho de fracções;</li> <li>• reconhecer e criar formas equivalentes de fracções vulgarmente usadas, decimais, e percentagens;</li> <li>• explorar números menores que 0 através da ampliação da recta numérica e através de aplicações familiares;</li> <li>• descrever classes de números de acordo com as suas características como a natureza dos seus factores.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• entender a estrutura do valor de posição do sistema de numeração de base dez e se capaz de e representar e comparar números inteiros e decimais;</li> <li>• trabalhar com agilidade com fracções, decimais, e percentagens para resolver problemas;</li> <li>• comparar e ordenar fracções, decimais, e percentagens eficazmente e encontrar as localizações aproximadas deles/delas numa recta numérica;</li> <li>• desenvolver o significado de percentagens maiores que 100 e menores que 1;</li> <li>• entender e usar relações e proporções para representar relações quantitativas;</li> <li>• desenvolver uma compreensão de números grandes, reconhecer e usar adequadamente as notações exponencial, científica, e da calculadora;</li> <li>• usar factores, múltiplos, factores primos, e números primos entre si para resolver problemas;</li> <li>• desenvolver o significado de inteiros e representar e comparar quantidades com eles.</li> </ul>



<p>Entender o significado das operações e como elas se relacionam umas com as outras.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>entender os vários significados de adição e subtração de números inteiros e a relação entre as duas operações;</li> <li>entender os efeitos de somar e subtrair números inteiros;</li> <li>entender situações que requerem multiplicação e divisão, como agrupamentos iguais de objectos e de partilha equitativa.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>entender vários significados de multiplicação e divisão;</li> <li>entender os efeitos de multiplicar e dividir números inteiros;</li> <li>identificar e usar relações entre operações, como divisão como o inverso de multiplicação, resolver problemas;</li> <li>entender e usar propriedades de operações, como a distributiva de multiplicação em relação à adição.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>entender o significado e efeitos de operações aritméticas com fracções, decimais, e inteiros;</li> <li>usar as propriedades associativa e comutativa de adição e da multiplicação e a propriedade distributiva de multiplicação em relação à adição para simplificar cálculos com inteiros, fracções, e decimais;</li> <li>entender e usar as relações inversas de adição e subtração, multiplicação e divisão, e potências de 2 e raízes quadradas para simplificar cálculos e resolver problemas.</li> </ul>
<p>Fazer cálculos com facilidade e fazer estimativas razoáveis</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>desenvolver e usar estratégias para cálculo com números inteiros, com um enfoque na adição e subtração;</li> <li>desenvolver naturalidade de combinações básicas de números para adição e subtração;</li> <li>usar uma variedade de métodos e ferramentas para calcular, incluindo objectos, cálculo mental, estimação, papel e lápis, e calculadoras.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>desenvolver aptidão para combinações básicas de números para a multiplicação e a divisão e usar estas combinações para calcular mentalmente problemas relacionados, como 30 50,;</li> <li>desenvolver aptidão na adição, subtração, multiplicação, e divisão de números inteiros,;</li> <li>desenvolver e usar estratégias para estimar os resultados de cálculos com números inteiros e avaliar a racionalidade de tais resultados;</li> <li>desenvolver e usar estratégias para estimar cálculos que envolvem fracções e decimais em situações pertinentes para a experiência dos alunos;</li> <li>usar modelos visuais, comparações e formas equivalentes para somar e subtrair fracções vulgarmente usadas e decimais;</li> <li>seleccionar métodos e ferramentas apropriados para operar com números inteiros entre o cálculo mental, estimação, calculadoras, e papel e lápis de acordo com o contexto e natureza do cálculo, e usar o método ou as ferramentas seleccionadas.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>seleccionar métodos e ferramentas apropriadas para cálculos com fracções e decimais de entre cálculo mental, estimação, calculadoras ou computadores, e papel e lápis e, dependendo da situação, e aplicar os métodos seleccionados;</li> <li>desenvolver e analisar algoritmos para cálculos com fracções, decimais, e inteiros e desenvolver facilidade no seu uso;</li> <li>desenvolver e usar estratégias para estimar os resultados de cálculos com números racionais e julgar a racionalidade dos resultados;</li> <li>desenvolver, analisar, e explicar métodos para resolver problemas que envolvem proporções, como ampliar e encontrar fracções equivalentes.</li> </ul>