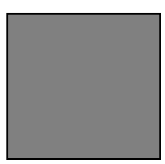
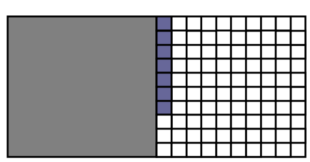
Mal entendidos mais comuns dos alunos relativamente às fracções e aos numerais decimais.

A) ***Numerais decimais*****:**

- Confusão entre décimas e centésimas, por exemplo confundem 2,5 com 2,05. O facto de se ler, “dois vírgula 5” e “dois vírgula zero cinco”, não evidencia a natureza das ordens e da grandeza dos números. Quando a leitura é feita lendo “ duas unidade e cinco décimas e duas unidades e cinco centésimas”, o realce é dado à quantidade.
- Quando consideram que 1,456 é maior que 1,5, os alunos confundem o número de algarismos com a quantidade. Se tem mais algarismos então é um número maior. É uma notória interferência com a lógica dos números inteiros;
- Na adição de uma centésima ao número 49,09 obtém 49,010 ou mesmo 50, revelando falta de entendimento do sistema de numeração decimal.
- Adicionam 4,1 + 2,3 correctamente mas quando uma das parcelas é um número inteiro o erro 3 + 4,1 = 4,4 é comum nas crianças que aprenderam a “colocar vírgula debaixo de vírgula” sem perceberem os números que estão a adicionar.
- Entre 0,1 e 0,2 não existem números racionais. Este erro pode ser explicado pela sequência discreta dos números inteiros a que os alunos estão habituados.
- Se  representa uma unidade

 representa 1,7.

Este erro revela uma incompreensão da noção de décima e de centésima. Alguns alunos consideram, que um numeral decimal representa dois números inteiros separados por uma vírgula.

B) Fracções:

- Na comparação dos números 1/3 e 1/4 os alunos referem que 1/4 é maior do que 1/3, precisamente porque 4 é maior que 3. Este erro é muito vulgar e é um indicador de que a representação fraccionária ainda não está compreendida.
- 1/2 = 1,2. Mais uma vez as representações não estão relacionadas com os números que representam.
- Na adição de números representados por fracções os alunos adicionam os numeradores e os denominadores, precisamente porque generalizam os algoritmos das operações com números inteiros.

Alguns destes erros revelam que o sistema de numeração decimal não está entendido e que as representações estão desligadas das quantidades a que dizem respeito. O trabalho que foi desenvolvido nos primeiros anos com os números inteiros interfere, como já foi referido, quando os alunos passam a trabalhar com números fraccionários. Os erros onde intervêm fracções são muito comuns. Aparentemente, alguns alunos parecem ter compreendido, visto que conseguem memorizar os procedimentos na altura em que estão a ser trabalhados nas aulas, mas passado um tempo, esquecem e confundem os algoritmos das operações. Esta situação enraíza no facto dos alunos serem submetidos a um ensino essencialmente mecanicista baseado em símbolos como realidades próprias, sem terem ainda desenvolvido imagens e modelos que os sustentem.

O que se pretende com um ensino centrado no desenvolvimento do sentido do número racional é que malentendidos como estes possam dar lugar a uma compreensão, não só dos números mas também das operações.

Os diferentes significados das fracções

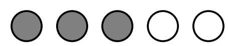
Uma fracção é uma representação versátil e muito rica, porque permite expressar diferentes relações. Mas esta multiplicidade de significados pode trazer ambiguidades, sendo fundamental que os professores estejam alertados para dificuldades que irão surgir durante o ensino, mas que por outro lado saibam tirar partido dessa mesma diversidade. A fracção 3/5 pode, por exemplo, ser interpretada como 3/5 de um bolo, como a razão entre o número de rapazes (3) e de raparigas (5) existentes numa sala de aula, ou como o quociente resultante de se dividir 3 chocolates iguais por cindo pessoas.

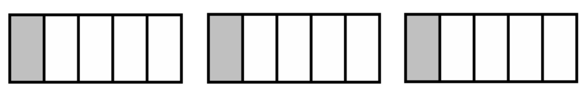
A investigação feita neste campo permite-nos afirmar que é na síntese da diversidade de situações e na teia de relações que os alunos vão estabelecendo a partir delas, que o sentido do número racional se vai desenvolvendo.

Ao nível elementar, em contextos escolares as fracções podem assumir diferentes significados:

***a) A relação parte – todo de uma unidade contínua*:** (três quintos de uma folha de papel está pintada)  $\frac{3}{5}$

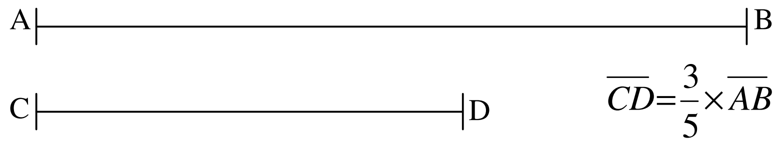
Nestes casos a fracção surge da comparação entre a parte e o todo, considerado este a unidade. O denominador indica o número de partes em que a unidade está dividida e o numerador o número de partes escolhidas;

b) ***A relação parte – todo de uma unidade discreta***: (três quintos de uma colecção de cinco berlindes são cinzentos)  $\frac{3}{5}$

c) ***O quociente entre dois números inteiros representado pela fracção a/b*** (com o denominador diferente de zero) que surge em situações de partilha equitativa. O numerador representa o número de coisas a ser partilhado e o denominador o número de receptores dessa partilha. É pois uma relação entre duas quantidades, mas que também tem o significado de uma quantidade, que é a quantidade de coisa com que cada um dos receptores ficou. Por exemplo, três chocolates a dividir por cinco crianças representa a relação entre o número de chocolates e o número de  $\frac{3}{5}$ crianças, mas também representa o resultado dessa divisão, ou seja, a fracção de chocolate com que cada criança ficou.

c) ***Operador partitivo multiplicativo*:** $\frac{3}{5}\times 20$ (três quintos de vinte caricas). Neste caso a fracção a/b transforma o cardinal de um conjunto discreto. Aqui o denominador indica uma divisão e o numerador uma multiplicação. Dividindo 20 por 5 e depois multiplicando por 3 encontramos os três quintos de vinte caricas.

d) ***A medida***. Nesta situação compara-se uma grandeza com outra tomada como unidade. O aluno terá de fraccionar a unidade de medida em partes tais, de modo a que esteja contida um número inteiro de vezes na grandeza a medir. Para medir com a unidade AB o comprimento CD, há que dividir a unidade em partes tais, que um número inteiro dessas partes corresponda ao comprimento que se quer medir.



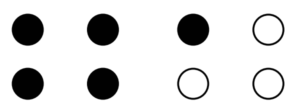
$$\overline{CD} = \frac{3}{5} \times \overline{AB}$$

e) ***A razão entre duas partes de um mesmo todo***. Por exemplo, numa turma a razão entre o número de rapazes e o número de raparigas é de três para cinco.

No caso das fracções representarem quantidades (porque como vimos também podem representar razões) elas só representarão a mesma quantidade se forem referidas à mesma unidade.

Diferentes tipos de unidade

Uma das maiores dificuldades inerentes ao estudo das fracções prende-se com a questão da unidade tomada como o todo a ser fraccionado. Metade de um quilo de laranjas não é o mesmo que metade de uma dúzia de ovos, ou um terço de uma folha de papel A4 não é o mesmo que um terço de um folha A5. Por exemplo se considerarmos a seguinte figura[1] podemos considerar várias fracções possíveis:



A. $1\frac{1}{4}$; Cada grupo de 4 pintas é uma unidade.

B. $\frac{5}{8}$; O conjunto das 8 pintas é a unidade.

C. $\frac{5}{3}$; Razão entre o n.º de pintas pretas e o n.º de pintas brancas.

D. 2,5; Cada 2 pintas é a unidade.

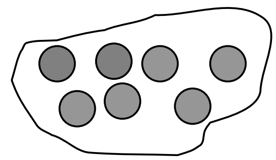
Quando esta situação é colocada aparecem diversas respostas, o que pode surpreender um professor que esteja à espera que a resposta seja 5/8.

Neste sentido é fundamental discutir com os alunos a questão da unidade chamando a atenção para o todo a que a fracção faz referência e apresentar situações diversificadas relativamente à unidade.

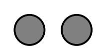
[1] Monchon, S. 1993.

Podem considerar-se vários tipos de unidade: simples ou unidades compostas, discretas ou contínuas.

Unidade Contínua **Unidade Discreta**



Uma dúzia de maçãs pode ser considerada uma unidade composta pois resulta de se agrupar um conjunto discreto de objectos, uma maça será uma unidade simples. A centena integra dez dezenas que por sua vez integra dez unidades simples. A construção de uma unidade composta, como a centena, implica que a criança coordene diferentes tipos de unidades ao mesmo tempo.

Por vezes, quando se trabalha as fracções ou os decimais, não há uma alusão clara à unidade de referência que serve de contexto, isto é, ao todo, o que pode trazer como consequência, mal entendidos, principalmente quando o ensino assenta em procedimentos, menosprezando abordagens conceptuais. A fracção 3/4 ou a dízima 0,75 podem ter vários significados, consoante os contextos onde são aplicadas. Podemos trabalhar somente a nível simbólico, mas até chegar a essa fase é muito importante que os alunos desenvolvam um significado para os símbolos. Isto faz-se através de problemas ou situações que façam sentido para os alunos. Neste sentido apresentamos tarefas de reconstrução da unidade. Por exemplo, se duas bolas -  representarem um quarto de uma colecção de bolas, quantas bolas tem a colecção? O mesmo se aconselha a fazer com unidades contínuas. Se  representa a décima parte de uma tira de papel qual é o comprimento da tira completa?

Os números racionais no Ensino Básico

Os números fraccionários constituem um dos assuntos do ensino básico que mais repercussão irá ter no entendimento de assuntos chave da matemática escolar. Atendendo à riqueza de relações que estes números implicam, eles são considerados importantes no desenvolvimento de estruturas mentais necessárias ao crescimento intelectual dos alunos.

Incluído na brochura: ***Desenvolvendo o sentido do número Racional*** de Cecília Monteiro e Hélia Pinto, edição da APM, Setembro 2007.

A noção de metade e da quarta parte, etc., são do conhecimento intuitivo das crianças desde muito cedo e estão relacionadas com situações do seu dia a dia. No entanto, e apesar disso, precisam de um trabalho intencional na sala de aula. Este trabalho pode ser feito desde os 7 anos de idade, à semelhança do que se faz noutros países e que já está contemplado na proposta de reajustamento dos programas para o 1.º ciclo. Iniciamos assim com um bloco de tarefas propedêuticas que exemplificam um trabalho que pode ser feito com os alunos a partir dos 7 anos de idade. No caso dos alunos mais velhos, que mesmo estando no 2.º ciclo ainda não tiveram contacto com fracções, aconselhamos a sua implementação como actividades iniciais.

Os programas que estão a ser nesta altura objecto de reformulação iniciavam os fraccionários positivos através das representações decimais. Iniciavam e continuavam durante mais 3 anos a enfatizar esse modo de representação. Como foi referido no início, as fracções apareciam no final do 5.º ano de escolaridade e muitas vezes, os professores relegavam-nas para o 6.º ano com o argumento da extensão do programa do 5.º ano. Na verdade, os quatro primeiros meses do 5.º ano têm sido dedicados a trabalhar as representações decimais, repetindo todo o trabalho dos anos anteriores. Sendo esta representação uma extensão da representação dos números inteiros no sistema de numeração decimal, pode parecer que se tornaria mais fácil para as crianças continuarem a mesma lógica de divisão em classes e ordens. Numa visão do ensino dos números baseado na estrutura decimal, faz sentido que assim seja, mas se entendermos o sentido do número de um modo holístico e relacional, esta representação pode ser considerada mais abstracta e demasiado apoiada nos símbolos, levando ao estabelecimento de regras, como a conhecida e muito praticada "vírgula debaixo de vírgula". No entanto, apesar de propormos que se inicie o estudo dos fraccionários positivos através das fracções, consideramos que deverão ser postas em conjunto as diferentes representações, ligando-as sempre com os modos de representação informais dos alunos enquanto resolvem problemas.

Os números racionais são um tema que ocupando uma grande parte do currículo do ensino básico, se reveste de uma grande importância para aprendizagens futuras da Matemática. Os racionais fraccionários, ao ampliarem a noção de número, acarretam conflitos conceptuais nas crianças. A ***densidade***[2] do conjunto dos racionais e o facto de

[2] O conjunto dos racionais é um conjunto denso porque entre dois quaisquer números é sempre possível encontrar uma infinidade de outros racionais. Esta característica dos racionais não existe no conjunto dos números inteiros, onde um número tem sempre um sucessor identificado.

haver várias representações para estes números (fracção, numeral decimal) acrescentam aspectos particulares que dificultam a sua compreensão. Por outro lado, o tempo dedicado nas aulas a resolver cálculos rotineiros com fracções e decimais, aplicando regras e algoritmos, é bastante mais alargado do que o dedicado à resolução de problemas. Esta situação leva a práticas sem sentido, como por exemplo reduzir ao mesmo denominador duas fracções para as adicionar, desinseridas de situações concretas. Se, numa primeira fase, este procedimento for descontextualizado, mais tarde é provavelmente esquecido e veremos muitos alunos a adicionarem os numeradores e os denominadores. Os algoritmos surgiram da necessidade de rapidamente se obter o resultado de uma operação quando já se reconhece o significado dos números e o sentido das operações. Antes, só servirão para tornar obscuros conceitos e relações, que são afinal o que se pretende desenvolver nos alunos. Depois, é importante que os algoritmos ganhem relevo, na medida em que facilitam os cálculos nalgumas situações; por exemplo, se quero dividir 3/4 por 7/12, facilita saber que me basta multiplicar o dividendo pelo inverso do divisor, percebendo porquê. É o caminhar para situações cada vez mais complexas que vai permitir interiorizar conceitos e procedimentos.

A noção de que uma fracção representa uma quantidade e que implica compreender a relação dessa parte com o todo, é uma ideia chave que se dilui na resolução de longas expressões numéricas. Uma mecanização desprovida de significado que em nada contribui para uma aprendizagem que possa ser mobilizada para resolver uma situação concreta, é uma das causas apontadas na literatura especializada para os maus resultados dos alunos na compreensão dos racionais e das operações aritméticas. Outras causas podem ter origem nos significados das fracções (parte todo, medida, razão, quociente e operador) e na diversidade de unidades. Estes aspectos nem sempre são tidos em conta no ensino tradicional, onde as fracções e os numerais decimais são apresentados através de uma unidade dividida num certo número de partes (10, no caso dos decimais), se apresenta a respectiva representação e a partir daí segue-se o cálculo de papel e lápis, sem tão pouco se incentivar o cálculo mental e a estimativa. Isto faz com que aquilo que os alunos retêm deste assunto nem sempre lhes sirva para grande coisa, a não ser, talvez, para os fazer repudiar a Matemática. O desgosto por esta disciplina surge, nalguns alunos, quando iniciam o estudo dos números racionais não inteiros, precisamente porque não entendem.