

Extraído do capítulo 3 do livro “Young Mathematicians at work: Constructing Fraction, Decimals and Percents” de Catherine Fosnot e Maarten Dolk

ESTRATÉGIAS DE EQUIVALÊNCIA DAS CRIANÇAS

Vamos agora visitar outra sala de aula, do sexto ano, em que os alunos estão a tentar determinar qual a comida de gato mais barata: 20 latas por 23 Euros ou 12 por 15 Euros. O professor Joel pediu aos alunos para o ajudarem a decidir qual é a alternativa mais barata. Ele comprou há pouco tempo um gatinho e viu estes dois preços para comida de gato em duas lojas diferentes (Loja “Animais felizes” e loja “Gatomania”).

Duas meninas, a Helaina e a Lucy, estão a trabalhar em conjunto e têm uma grande folha de papel e marcadores.

- Faz de conta que é um Euro por lata em ambas as lojas - sugere a Helaina como forma de começar - sobram três Euros em cada caso.

- Então sabemos que o preço por lata é ligeiramente mais do que um Euro - conclui a Lucy..

- O problema é quanto mais! - suspira Helaina. As crianças estão com dificuldade em estabelecer uma equivalência para poderem fazer uma comparação. O que é que podem usar como o todo? O que seria uma boa unidade de comparação?

- Porque é que não dividimos? - sugere a Lucy - Vamos ver quanto é que custa exactamente cada lata.

Então decidem comparar as unidades: o custo de cada lata nas duas lojas. Dividem 15 por 12 e obtêm $1\frac{1}{4}$

- Dá um Euro e vinte e cinco cêntimos - afirma a Lucy - um quarto são vinte e cinco cêntimos.

Depois dividem 23 por 20 e obtêm $1\frac{3}{20}$

- Quanto dinheiro é isto? - pergunta a Lucy. Agora têm um novo problema: determinar a equivalência decimal.

Do outro lado da sala, a Chloe e a Josi estão a trabalhar no mesmo problema, embora tenham começado de forma diferente. Elas iniciaram com uma equivalência de $15/12$ para $5/4$ $5/4$ $5/4$, dizendo:

- Temos três grupos de cinco Euros para quatro latas. Se dividirmos cada um destes números - apontando para o 15 e o 12 - obtemos o custo de quatro latas: cinco Euros!

No início elas pensavam que conseguiriam calcular o custo de quatro latas na loja da Gatomania e compará-lo com o custo de quatro latas na loja do Animais Felizes, mas isso foi demasiado difícil para elas. O segundo valor não era fácil de dividir.

- Vamos calcular o custo de uma lata - sugere a Chloe. Mas a estratégia delas não é a divisão, como a Lucy e a Helaina. Elas calculam fracções unitárias equivalentes. A Chloe continua:

- Cinco quartos é o mesmo que quatro quartos mais um quarto ou, uma unidade mais um quarto. Por isso dá uma lata por 1,25 Euros. Agora quanto é que é vinte e três avos?

As duas crianças parecem confusas.

- Tenho uma ideia - diz a Josi - é uma unidade mais três vinte avos, certo? - A Chloe acena em acordo. Esta parte foi fácil para ela perceber mas ela pergunta-se o que a Josi irá fazer a seguir.

- Três vinte avos são o mesmo que um vinte avos mais um vinte avos, mais um vinte avos. - Mais uma vez a Chloe acena com a cabeça.

- OK - anuncia a Josi - e o que é um vinte avos de um Euro?

A Chloe pensa durante um momento e depois pergunta: - Cinco cêntimos?

- Certo - responde a Josi entusiasmada - Então vezes três são quinze cêntimos!

- Boa! - exclama a Chloe impressionada com o resultado - Então estas são mais baratas. É apenas um Euro e quinze cêntimos!

As quatro crianças abordaram o problema comparando o custo unitário das latas. Mas a estratégia para o fazer em cada grupo foi diferente. A Lucy e a Helaina utilizaram a divisão para encontrar o custo de cada unidade (ver Figura 1) enquanto a Josi e a Chloe obtiveram fracções equivalentes, simplificando e procurando fracções equivalentes (ver Figura2).

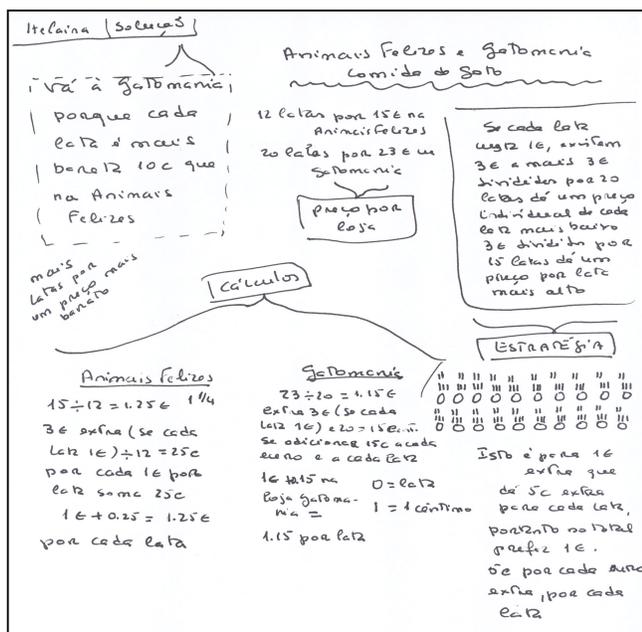


Figura 1

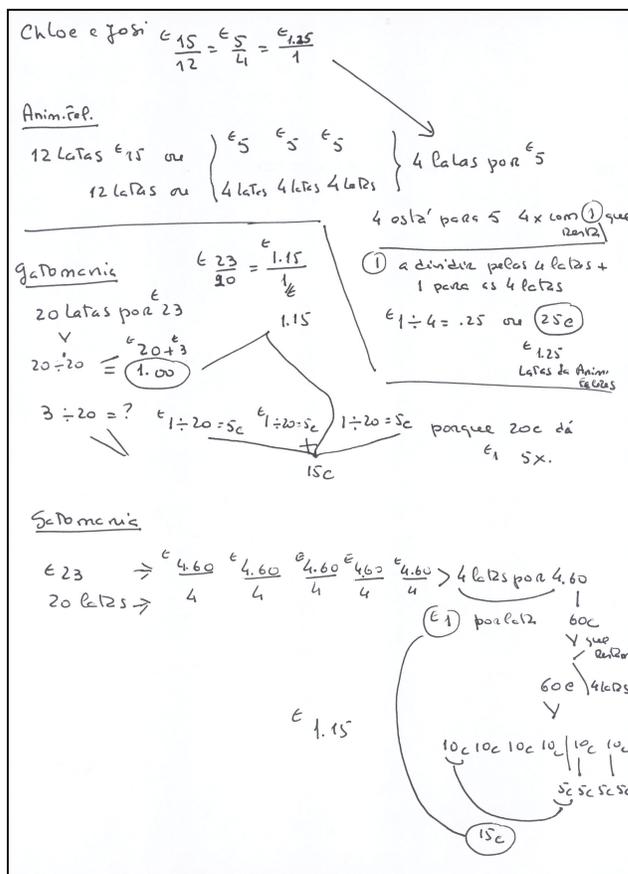


Figura 2

O Dylan e o Tristan usaram uma terceira estratégia. Eles construíram uma tabela de razões (ver Figura 3), com base na qual conseguem combinar montantes para estabelecer uma equivalência. Quando estão a ponderar qual a quantidade de unidade que devem comparar (o custo de um determinado número de latas), ele têm a brilhante ideia de usar um múltiplo comum:

Dylan, Tristan

Loja Animais Felizes	Loja Gatomania																				
12 latas = 15€ 6 latas = 7,5€ 3 latas = 3,75€ 1 lata = 1,25€	20 latas = 23€ 10 latas = 11,5€ 5 latas = 5,75€ 1 lata = 1,15€																				
Mais cara	Mais barato																				
12 latas = 15,00€ 20 latas = 25,00€	Cada lata é 1,15€ e na loja Animais Felizes vendem cada lata por 1,25€. Por isso a loja Gatomania é onde se deve comprar a comida do gato																				
$\begin{array}{r} 1,25 \\ \times 20 \\ \hline 0,00 \\ 25,00 \end{array}$	$\begin{array}{r} 12 \\ \times 5 \\ \hline 60 \end{array}$ $\begin{array}{r} 15,00 \\ \times 5 \\ \hline 75,00 \end{array}$ 20 latas = 25,00€ na Loja Animais Felizes 20 latas = 23,00€ na Loja Gatomania 2€ de diferença!																				
ESTRATÉGIA																					
Parte 1. Considerar o número inicial das latas e dividir-lo ^{o maior} pelo menor com o preço. Fazer isto até se ter uma lata e encontrar o preço.																					
Parte 2. Para cada loja obter o preço de 1 lata e multiplicá-lo por 20 para encontrar qual a loja mais barata.																					
Exemplo: <table style="margin-left: 20px;"> <tr> <td>12 latas = 15€</td> <td>20 latas = 23€</td> </tr> <tr> <td>6 latas = 7,5€</td> <td>10 latas = 11,5€</td> </tr> <tr> <td>3 latas = 3,75€</td> <td>5 latas = 5,75€</td> </tr> <tr> <td>1 lata = 1,25€</td> <td>1 lata = 1,15€</td> </tr> </table>	12 latas = 15€	20 latas = 23€	6 latas = 7,5€	10 latas = 11,5€	3 latas = 3,75€	5 latas = 5,75€	1 lata = 1,25€	1 lata = 1,15€	Parte 2 - Exemplo: <table style="margin-left: 20px;"> <thead> <tr> <th>Animais Felizes</th> <th>Gatomania</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>20 latas = 25,00</td> <td>20 latas = 23,00</td> </tr> <tr> <td>1,25</td> <td>1,15</td> </tr> <tr> <td>$\times 20$</td> <td>$\times 20$</td> </tr> <tr> <td>$\hline 0,00$</td> <td>$\hline 0,00$</td> </tr> <tr> <td>25,00</td> <td>23,00</td> </tr> </tbody> </table>	Animais Felizes	Gatomania	20 latas = 25,00	20 latas = 23,00	1,25	1,15	$\times 20$	$\times 20$	$\hline 0,00$	$\hline 0,00$	25,00	23,00
12 latas = 15€	20 latas = 23€																				
6 latas = 7,5€	10 latas = 11,5€																				
3 latas = 3,75€	5 latas = 5,75€																				
1 lata = 1,25€	1 lata = 1,15€																				
Animais Felizes	Gatomania																				
20 latas = 25,00	20 latas = 23,00																				
1,25	1,15																				
$\times 20$	$\times 20$																				
$\hline 0,00$	$\hline 0,00$																				
25,00	23,00																				

Figura 3

- Hei! Podíamos usar sessenta latas! - sugere o Dylan - Sessenta é múltiplo de doze e de vinte!

Eles acrescentam 60 ao quadro de razões, calculando que o custo de 60 latas. Na Loja da Gatomania seria de 69 Euros enquanto na Loja do Animais Felizes seria de 75 Euros.

A sala de aula está transformada numa comunidade de jovens matemáticos em acção. São usadas diferentes abordagens para estabelecer equivalências e são visíveis diferentes formas de matematização. Algumas são reminiscências das fracções unitárias da antiga Babilónia; outras utilizam tabelas de razões e múltiplos comuns; outras ainda mostram sinais de divisão. Uma vez que a sala de aula é uma comunidade

de indivíduos, é uma arena rica em diversidade. O conceito de equivalência está no horizonte quando o professor Joel pensa na direcção que está a tomar. Mas as crianças encontram-se em diferentes pontos da viagem. O professor tira partido destas diferenças durante o congresso de matemática.

O Congresso de Matemática

- Ontem quando estávamos a analisar qual das lojas tinha o preço mais barato para as latas de comida para gato observei diversas estratégias e gostaria de falar hoje acerca delas. Helaina e Lucy podem começar a contar o que fizeram?

- Nós percebemos que se cada lata custasse um Euro nas duas lojas, sobravam três Euros em ambos os casos - começou a Helaina - Três dividido por doze é vinte e cinco cêntimos. Por isso no Loja do Animais Felizes cada lata custava 1,25 Euros.

A Lucy termina a explicação: - Na loja da Gatomania tínhamos três Euros e nós percebemos que isso eram cinco cêntimos para cada Euro, uma vez que cada Euro são vinte moedas de cinco cêntimos... e isso dá quinze cêntimos, portanto cada lata custa 1,15 Euros.

- Quem é que consegue explicar a estratégia da Helaina e da Lucy? - O professor procura confirmar se os alunos perceberam, virando-se para a comunidade. Em vez de ser ele a explicar, procura que sejam os alunos responsáveis por comunicar e compreender o trabalho uns dos outros. O objectivo é que ao explicarem o seu raciocínio uns aos outros eles vão pensando de forma mais profunda e aprendam a comunicar ideias matemáticas uns aos outros. Depois da estratégia da Helaina e da Lucy ter sido aparentemente compreendida, o professor vira-se para o Tristan e o Dylan, que usaram uma tabela de razões, e pede-lhes para partilharem a estratégia deles.

- Começamos por dividir em metades - explica o Dylan - Se doze latas custam 15 Euros, então seis latas deveriam custar 7,5 Euros e três latas 3,75 Euros. Não dividimos mais porque isso daria uma lata e meia. Então calculámos um terço e obtivemos o custo de uma lata: 1,25 Euros. Depois fizemos o mesmo com as latas da Gatomania. Se vinte latas custam 23 Euros, então dez latas custam 11,50 Euros. Isso significa que cinco latas custam 5,75 Euros e uma lata custa 1,15 Euros.

À medida que as crianças tentam compreender como o Dylan e o Tristan calcularam as suas razões, inicia-se uma discussão. Quando finalmente se chega a um acordo, o professor Joel sugere registar as diferentes razões num quadro em forma de "T" (ver Figura 4).

Loja do Animais Felizes		Loja da Gatomania	
12 latas	15,00 euros	20 latas	23,00 euros
6 latas	7,50 euros	10 latas	11,50 euros
3 latas	3,75 euros	5 latas	5,75 euros
1 lata	1,25 euros	1 lata	1,15 euros

Figura 4

- Poderíamos ter usado outros números? - pergunta o professor, virando-se para a Chloe e a Josi - O que é que vocês fizeram?

- Nós procurámos um múltiplo comum e não um factor. Escolhemos o número quatro porque vinte latas e doze latas são ambos múltiplos de quatro - explica a Chloe - Na loja da Gatomania havia vinte latas, ou seja cinco grupos de quatro. Por isso, cada quatro latas custam 4,60 Euros. No Loja do Animais Felizes havia

doze latas, ou seja três grupos de quatro. Por isso, cada grupo de quatro latas custava 5 Euros.

O professor acrescenta estas razões à sua tabela.

- Então vamos lá ver. Estamos a dizer que tudo isto é equivalente? - Na tabela ele escreve $\frac{15}{12} = \frac{7,5}{6}$
Euros.¹

- Estas duas representações são equivalentes? Discutam esta questão com a pessoa sentada ao vosso lado durante trinta segundos.

Para garantir que todos os alunos estão a acompanhar, o professor opta por uma discussão em pares em vez de uma discussão com toda a turma. Desta forma ele garante que todos os alunos estão a analisar a ideia fundamental em causa: a equivalência. Depois de ouvir algumas conversas ele retoma a discussão com toda a turma:

- Kevin? O que é tu e o teu par discutiram?

- Nós achamos que são equivalentes - respondeu o Kevin - porque quinze dividido por dois é igual a 7,5. É metade do numerador. E o denominador... doze dividido por dois é seis. É também metade.

- Concordam todos com o Kevin? Alguém quer acrescentar alguma coisa?

Victor?

- Eu concordo com o Kevin. Se fizermos a mesma coisa ao numerador e denominador, eles são equivalentes.

- Todos concordam? Se fizermos a mesma coisa às latas e aos Euros eles são equivalentes?

O professor tenta manter a conversa dentro do contexto para que os alunos compreendam o que estão a fazer. Ao olhar para as caras dos alunos, todos parecem estar de acordo e ele continua:

- E então será que eu posso também juntar estas fracções?

o professor Joel escreve no quadro $\frac{5}{12} = \frac{7,5}{6} = \frac{3,75}{3} = \frac{1,25}{1}$

- Sim - diversos alunos expressam o seu acordo verbalmente, enquanto outros acenam com a cabeça.

- E posso fazer a mesma coisa para o Loja Gatomania?

O professor escreve $\frac{23}{20} = \frac{11,5}{10} = \frac{5,75}{5} = \frac{1,15}{1} = \frac{4,60}{4}$.

Mais uma vez os alunos acenam positivamente e o professor continua a desenvolver mais equivalências:

- André e Zacarias ... Vocês usaram sessenta latas para comparar. Podem explicar-nos porquê?

¹ A notação na forma de fracção de uma razão em que o numerador não é um número inteiro não é usual na matemática escolar dos primeiros anos, em Portugal.

- Era um múltiplo comum. Nós multiplicamos vinte por três e doze por cinco.

O professor Joel junta $\frac{?}{60}$ a cada igualdade anterior enquanto o André e o Zacarias explicam a sua abordagem. Mas em vez de os deixar continuar a explicar como é que eles calcularam o custo de sessenta latas em cada loja, ele interrompe-os e mais uma vez pede aos alunos para discutirem a questão em pares. Ele quer que todos os alunos estejam envolvidos no cálculo das fracções equivalentes.

- O que acham então do que o André e o Zacarias fizeram? Se comprar sessenta latas em cada loja o" com o vosso par discutam durante um minuto quanto é que isso custaria em cada uma das lojas.

Depois de ouvir algumas conversas, o professor Joel percebe que os alunos parecem ser capazes de determinar facilmente o numerador. Então ele pede ao Zé para explicar o que a maioria dos alunos está a discutir.

- Zé?

- 23 Euros por vinte latas dá 69 Euros por sessenta. Basta multiplicar

por três porque são três vezes o número de latas.

- Então, Chloe ... e como é que é com o Loja do Animais Felizes? - pergunta o professor, trazendo uma nova voz para a discussão.

- Nós fizemos ... Penso que está certo. Uma vez que multiplicaram doze por cinco para chegar a sessenta, têm de multiplicar também quinze por cinco. Por isso concluímos que seria setenta e cinco Euros por sessenta latas.

O professor acrescenta estas equivalências às outras e pergunta:

- Então estes valores são todos equivalentes? O que fizemos ao numerador temos também que fazer ao denominador?

Vendo que as crianças concordam novamente, o professor regressa à tabela e encoraja-os a utilizarem-na como uma tabela de razão

- Há mais algum número de latas que pudéssemos ainda comparar?

Mais uma vez o professor Joel pede aos alunos para trabalharem em pares e depois pede ao Guilherme para partilhar as suas conclusões. Cada vez que ele utiliza a discussão em pares ele traz mais vozes para a conversa:

- Guilherme ... Podes descrever o que tu e a Felícia discutiram?

- Nós pensamos que se dividíssemos setenta e cinco por dois e sessenta

por dois encontraríamos outra razão equivalente.

- E o que é que obtiveram? - insiste o professor.

- 37,50 Euros por trinta latas.

- E no Loja da Gatomania? Quanto custariam trinta latas? Jorge?

- 34,50 Euros ... Ou seja, metade de sessenta e nove.

- E é possível comparar outros números de latas? ... Caria?

A Chloe utilizou o número dez: - São 11,50 Euros por cada dez latas por isso é três vezes isso ... 34,50 Euros por trinta latas - explica ela confiante. - E se fossem vinte latas? - pergunta o professor, procurando estimular os alunos a usar a tabela de razões - poderíamos calcular o custo dessa quantidade de latas em cada loja? .. Catarina?

- Isso é o dobro do custo das dez latas. E o custo das vinte latas e o das dez poderiam ser adicionados para determinar o custo das trinta - exclama a Catarina, entusiasmada.

Então a Verónica levanta a mão e o professor Joel sorri ao vê-la oferecer-se para apresentar as suas conclusões:

- É como ... Também poderíamos utilizar vinte trigésimos e multiplicá-los por um e meio sobre um e meio ... E o mesmo que somar o custo de vinte e o custo de dez!

Os alunos do professor Joel encontraram inúmeras formas de determinar e provar a equivalência. Eles estão a usar a tabela de rácio como ferramenta. Estão a estabelecer equivalências multiplicando ou dividindo o numerador e o denominador pela mesma quantidade multiplicando ou dividindo a fracção original por um. Eles conseguem determinar equivalências unitárias e fracções comuns (ordinárias), construindo e representando ideias sobre fracções que os seres humanos levaram séculos a descobrir!

Estender a Equivalência aos Números Decimais e às Percentagens

Os alunos do professor Joel são capazes de calcular equivalências decimais e fraccionárias. Mas isso porque estão no contexto do dinheiro. Uma vez que o nosso sistema monetário é um sistema decimal, ele funciona como um contexto excelente para desenvolver equivalências de referência (0,5; 0,50; 50%; 10%0; 0,10; 0,1; 0,25; 25%; etc.). Mas é importante e necessário generalizar estas noções para outras equivalências decimais e percentuais. Que contextos podem ser úteis neste caso?