

Multiplicação e divisão: dos números inteiros aos números racionais

Os alunos de nível de escolaridade médio devem ampliar a sua compreensão das operações com números para fracções, decimais, inteiros e racionais. É usual dar-se uma atenção considerável aos algoritmos da multiplicação e divisão de racionais, mas pouca atenção à ampliação dos conceitos das próprias operações dos inteiros para os racionais.

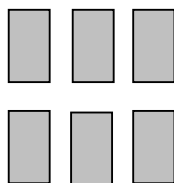
Ampliando a noção de multiplicação. A definição de adição repetida, enquanto ligação útil entre multiplicação e adição, é limitada se for o único conceito que os alunos têm de multiplicação. Alguns investigadores chamaram ao modelo de repetição da adição como um “modelo primitivo” da multiplicação.

Uma vez que a multiplicação se desenvolve primeiro no domínio dos números inteiros onde, com pequenas excepções, a adição “torna maior o resultado”, os alunos com frequência concluem que a multiplicação “torna sempre maior o resultado”.

A multiplicação com números decimais não inteiros ou com fracções comuns não é facilmente interpretada: primeiro porque a adição por um valor fraccionário é difícil; segundo porque o produto não é sempre maior (pense em $0,5 \times 0,5$). Adiciono 0,5 a si mesmo meia vez? Pense em $2/3 \times 3/4$. Adiciono $2/3$ a si mesmo $3/4$ de vezes? Para além disso, embora os modelos rectangulares, de área, ou combinatório (ver fig. 1, 2, 3) possam ter tido origem na concepção da adição sucessiva, a relação entre estas situações e a multiplicação não aparece imediatamente.

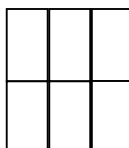
O modelo rectangular pode facilmente ser ligado à adição repetida. Os alunos podem ser confrontados com uma situação como esta: “A Ana arquivou no seu dossier três fotografias por fila. Cada página tem espaço para quatro filas de fotografias. Quantas fotografias pode colocar em cada página?”

Figura 1. um modelo rectangular de 2×3



Como resposta, os alunos podem fazer desenhos que podem ser interpretados como adições repetidas. A disposição das linhas pode ser relacionada com o modelo da adição repetida. Peças quadradas ou cubos cuidadosamente arrumados no retroprojector também podem ilustrar as filas e as correspondentes expressões multiplicativas.

Figura 2. um modelo de área de 2×3



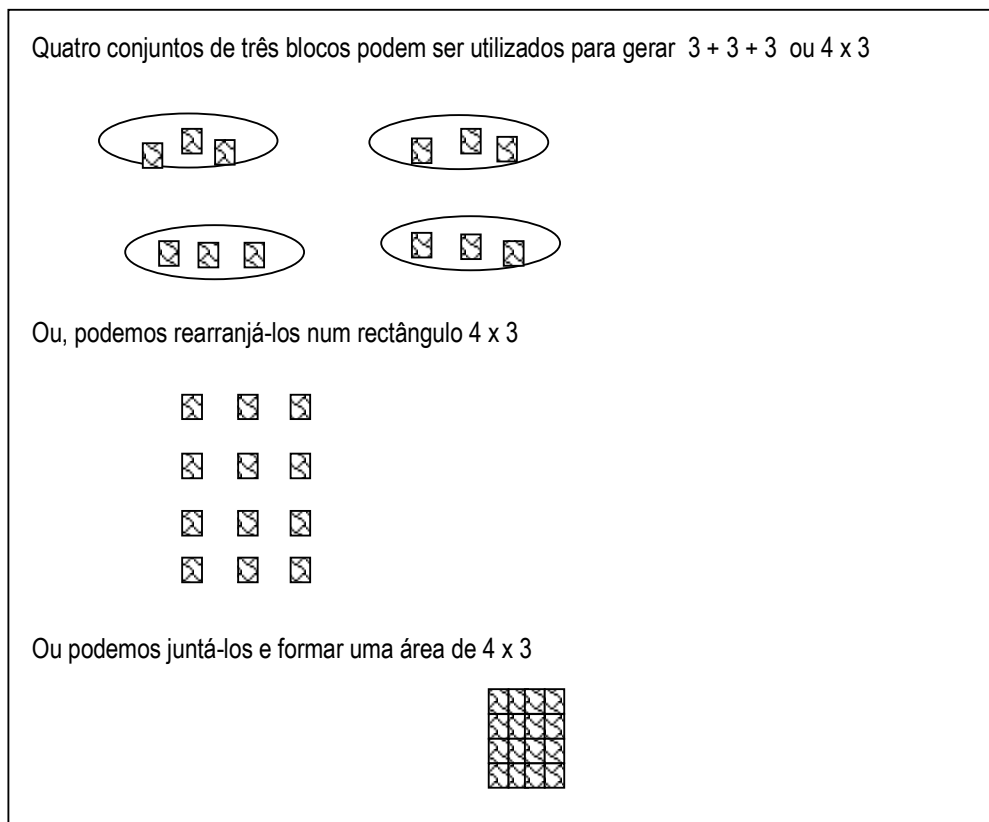
Se se juntarem os quadrados alinhados, os modelos de adição repetida e rectangular podem ser ligados ao modelo de área. Os alunos necessitarão de vários exemplos e técnicas para fazer ou reforçar a transição entre modelos.

Figura 3. Um modelo de produto cruzado de 2 x 3



Será bem empregue o tempo de um primeiro desenvolvimento / aprofundamento da interpretação do modelo de área com os números inteiros.

Figura 4 – Relacionando o modelo de adição repetida com o modelo rectangular e o modelo de área.



Depois o modelo deve ser utilizado para dar sentido a expressões como $6 \times 2/3$, $2/3 \times 3/4$ ou $0,5 \times 0,5$ (ver figuras 5 e 6), até o modelo se tornar familiar. A hesitação de os alunos aceitarem que $0,25$ é o produto de $0,5 \times 0,5$ é lógica uma vez que a multiplicação (por factores inteiros excepto o 0 ou o 1) resultou sempre num produto maior que qualquer dos factores. Assim parece útil que os alunos compreendam o modelo como forma de entenderem a multiplicação de números racionais.

Figura 5. Modelo de área para $0,5 \times 0,5 = 0,25$

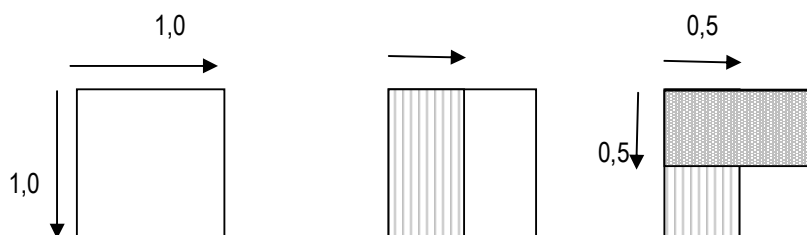
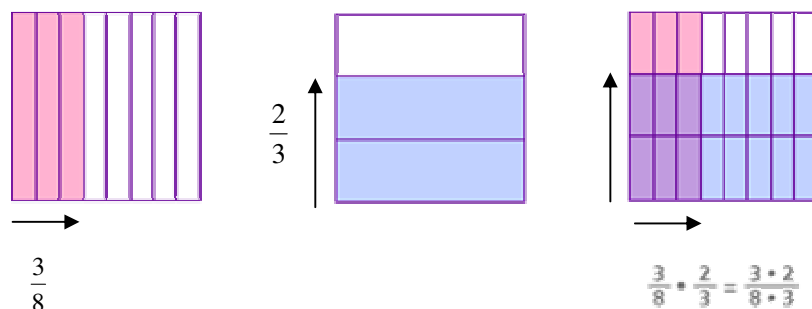


Figura 6 - Modelo de área para $\frac{3}{8} \times \frac{2}{3} = \frac{6}{24}$



Outras actividades que podem reforçar o perceber que a multiplicação nem sempre torna o produto maior podem incluir a exploração de padrões como 6×6 , 5×6 , 4×6 , 3×6 , 2×6 , 1×6 , 0×6 . Se os decimais, fracções e numerais mistos estiverem entendidos, os alunos devem utilizar os seus conhecimentos para estimar os valores dos produtos tais como $2,4 \times 6$ ou $1,7 \times 6$ e eventualmente $0,6 \times 6$.

Os valores destes produtos podem ser encontrados utilizando uma calculadora. Para um conjunto de exemplos a turma pode discutir o padrão e a grandeza do produto em relação ao factor constante. Os alunos devem também ser encorajados a escrever sobre o padrão, descrevendo-o a outros, destacando alguma coisa que considerem não esperado, e dizendo porque acham o resultado estranho. Se este trabalho for feito no contexto de uma experiência real como o “aumento e diminuição” de objectos ou cálculo da área do rectângulo com a medida de um dos lados mantendo-se constante, a razoabilidade dos resultados dos cálculos pode tornar-se mais evidente.

Pode-se explorar a analogia de “encolher e esticar” com o que acontece numa máquina de fotocópias que pode ampliar e reduzir em função de um determinado conjunto de factores. Os alunos podem investigar o que acontece a uma linha de 10cm se copiada com o factor 2, 1,5, 1,0 ou 0,5. Também as opções de impressão de gráficos do computador permitem aumentar ou reduzir figuras, mapas e outros desenhos proporcionando dados adicionais para a resolução de problemas envolvendo a multiplicação por factores menores que 1.

Ampliando a noção de divisão. As experiências dos alunos no 1º ciclo com os números inteiros leva-os a colocarem restrições que não são necessariamente verdadeiras no domínio dos números racionais e dos números reais.

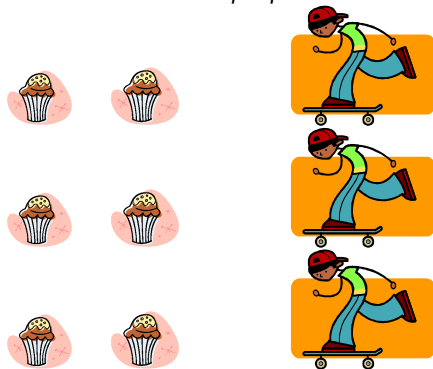
Há alunos dos níveis de escolaridade intermédia que acham que não é possível fazer divisões com o divisor maior que o dividendo (excepto talvez no contexto do dinheiro). A noção de dois a dividir por quatro não lhes é totalmente estranha uma vez que todos concordarão que duas pizzas poderão ser partilhadas por quatro amigos. O que estes alunos parecem desconhecer é que a expressão simbólica que eles conhecem como divisão também pode ser utilizada para representar essa partilha 2:4.

Há muitas razões pelas quais os alunos podem pensar que não se pode dividir por um número decimal, isto é, afirmar que exemplos como $2 : 0,25$ são impossíveis. Isto acontece quando tiveram experiências restritas ao domínio dos números inteiros, à dominância da interpretação da divisão como partilha, ao procedimento da divisão por um decimal menor que 1 (muda o decimal para um número inteiro e divide como número inteiro) ou qualquer combinação disto.

Muitos manuais introduzem a divisão como subtracções sucessivas – quantos 2 há em 6? Esta interpretação, encontrar quantos conjuntos de um dado tamanho estão contidos num total, foi designado como o modelo da divisão como medida (ver fig 7).

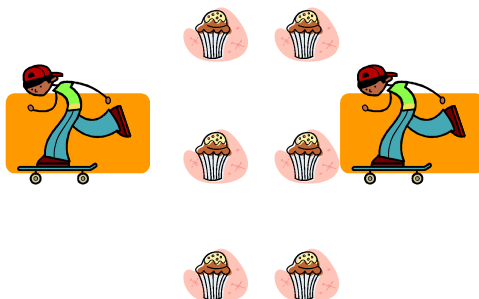
Figura 7 - Modelo de medida para $6 \div 2$

Vão dar-se dois bolos por pessoa. Há seis bolos. Quantas pessoas terão bolos?



Quando se utiliza um modelo alternativo, o modelo partitivo, procura-se encontrar o tamanho de cada uma das partes iguais de um dado número como se mostra na figura 8.

Figura 8 - Modelo partitivo para $6 \div 2$
Duas pessoas partilham 6 bolos. Quantos bolos fica para cada uma?



Infelizmente, a frequência da utilização do modelo de medida na resolução de problemas é muito baixa; e o modelo partitivo, que parece dominar muito do pensamento dos adultos acerca da divisão, é reforçado.

Embora este modelo partitivo seja importante, a interpretação partitiva de 9 dividido por 1,5 (quanto há em cada grupo se eu dividir 9 igualmente por 1,5 grupos) não é facilmente imaginado ou representado por um desenho ou por materiais manipulativos. Contudo, usando o modelo de medida, pode-se colocar uma pergunta mais fácil e imaginar a resposta. “Quantos 1,5 cabem em 9?” Esta interpretação facilita a solução usando desenhos, materiais manipulativos, ou medindo segmentos de 1,5cm ao longo de uma linha com 9cm.

Os modelos de medida e partitivo são amplamente aceites como duas primeiras noções de divisão. O modelo primitivo de partilha, baseado na experiência de partilhar, pede que o divisor seja um número inteiro menor que o dividendo e portanto o quociente seja menor que o dividendo. Estas características são típicas dos problemas elementares da divisão nos quais a divisão está confinada ao conjunto dos números inteiros. No modelo primitivo de medida o único constrangimento pedido pelo modelo é que o divisor seja menor que o dividendo. O uso continuado do modelo de medida permite aos alunos interpretar a divisão de números racionais e portanto encontrarem quocientes maiores que o dividendo. Por exemplo, $2 : 0,25$ pode ser pensado como quantos quartos há em dois? O quociente resultante, oito, é maior que o dividendo, dois.

Para além destes dois modelos de divisão, pode-se considerar outros que têm por base a relação da divisão como operação inversa da multiplicação¹. Nesta categoria de situações existe uma relação multiplicativa entre três

¹ Liping Ma (1999) designa por “produto e factores”.

medidas sendo uma delas o produto das outras duas. São situações normalmente relacionadas com o modelo de área², i.e., temos um produto conhecido (b) e um dos factores (a) e precisamos de conhecer o outro factor (x):

$a \times x = b$ então $x = b \div a$. Por exemplo: “A área de um rectângulo é igual a $24 m^2$, se o seu comprimento for igual a $12 m$, quanto mede a sua largura?” ou “o volume de um cilindro for igual a $36 m^3$ e a altura for igual a $4 m$, qual é a medida da área da base?”.

A multiplicação também costuma ser trabalhada em contextos de produto cartesiano. Se $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{d, e\}$, $A \times B = \{(a, d), (b, d), (c, d), (a, e), (b, e), (c, e)\}$. Então se $\#A = 3$ e $\#B = 2$, $\#(A \times B) = 6$, $\#B = \#(A \times B) \div \#A$. Assim sendo, pode-se também apresentar aos alunos situações de divisão em que é dado o cardinal de um dos conjuntos, por exemplo, 3 camisas e o número total (12) de toilettes diferentes feitas com dois tipos de peças de vestuário (calças e camisas) e pedir-lhes que determinem o número de calças.

Segundo Pinto, Hélia e Monteiro, Cecília, outro dos mal-entendidos comuns resulta na confusão da divisão por $\frac{1}{2}$ com a divisão por 2. Por exemplo, quando se pede aos alunos que escrevam um enunciado para a expressão: $1\frac{1}{3} \div \frac{1}{2}$, as respostas mais comuns envolvem de forma errada a partilha, levando a um enunciado que ilustra $1\frac{1}{3} \div 2$, como este, “duas amigas querem dividir igualmente $1\frac{1}{3}$ de piza. Com que quantidade de piza fica cada amiga?”. O erro prende-se com a interpretação de $1\frac{1}{3} \div \frac{1}{2}$ como “ $1\frac{1}{3}$ dividido ao meio”

Perante o enunciado: “ $1\frac{3}{4}$ litros de leite são distribuídos igualmente por 6 canecas. Qual poderá ser a capacidade dessas canecas?”, os alunos acham que a expressão $6 \div 1\frac{3}{4}$ é solução do problema, obtendo $3\frac{3}{7}$.

Mesmo que os alunos tenham aplicado correctamente o algoritmo na resolução do problema anterior, a resposta $\frac{7}{24}$ é pobre. Os alunos não devem perder de vista o contexto. Não existem canecas com uma capacidade de $\frac{7}{24}$ litro. Este exemplo apresenta uma oportunidade para se discutirem os tamanhos normalizados. $\frac{7}{24}$ é mais do que

$\frac{1}{4}$ de litro? É menos do que $\frac{1}{2}$ litro?

Para obviar estas dificuldades é importante que os alunos (a) verbalizem as suas expectativas sobre os resultados dos problemas (b) argumentem sobre a correcção de soluções alternativas, (c) pratiquem a aplicação dos conceitos e procedimentos e (d) revejam em que é que as suas expectativas diferem dos resultados e porquê. Pensa-se que desta forma os alunos percorrem uma série de etapas mentais que facilitarão mudanças conceptuais ou reestruturação de concepções.

² Não confundir com o modelo rectangular, por exemplo “7 filas com 3 cadeiras cada, quantas cadeiras há ao todo? Podemos encontrar dois tipos de situação de divisão: “temos 21 cadeiras dispostas em 7 filas, quantas cadeiras tem cada fila? (partilha), ou “temos 21 cadeiras dispostas em filas com 3 cadeiras cada, quantas filas temos? (medida).

Os algoritmos para a divisão de frações

Tradicionalmente, a aprendizagem da divisão de números racionais representados por frações passa pela ênfase do algoritmo “*inverter o divisor e multiplicar*” (IM). O problema não está no facto de se ensinar este algoritmo, mas na forma como se ensina e quando. O algoritmo IM muitas vezes é ensinado sem conexão com o significado da operação. Quando crianças de 11/12 anos são ensinadas a multiplicar “a primeira fração pelo inverso da segunda”, não entendem porque, se estão a dividir, têm de multiplicar. Um dos erros típicos consiste na inversão do dividendo, o que indicia uma completa incompreensão do que estão a fazer.

De um modo formal a justificação para o algoritmo IM, passa pelo conhecimento da propriedade da invariância do quociente, do inverso de um número e de que se o divisor é 1 o quociente é igual ao dividendo. Adquiridos estes conhecimentos é fácil perceber porque dividir por um número é o mesmo que multiplicar pelo seu inverso. Por exemplo:

$$\frac{3}{4} \div \frac{2}{5} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{2} \div \left(\frac{2}{5} \times \frac{5}{2}\right) = \frac{3}{4} \times \frac{5}{2} \div 1 = \frac{3}{4} \times \frac{5}{2} = \frac{15}{8} = 1\frac{7}{8}$$

Durante o percurso para a compreensão da divisão, é importante que os alunos sejam confrontados com situações que os leve a entender que se multiplicarmos o dividendo e o divisor pelo mesmo número (diferente de zero), o quociente não se altera. Por exemplo, 20 bolachas a partilhar igualmente por 4 meninos, resulta no mesmo número de bolachas por menino, que 40 bolachas a partilhar por 8 meninos.

Outro algoritmo é o “dividir numeradores e dividir denominadores”. Uma professora chinesa apresenta a justificação

do algoritmo na divisão de: $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$, assim,

$$1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2} = \frac{7}{4} \div \frac{1}{2} = (7 \div 4) \div (1 \div 2) = 7 \div 4 \div 1 \times 2 = 7 \div 1 \div 4 \times 2 = (7 \div 1) \div (4 \div 2) = \frac{7 \div 1}{4 \div 2}$$

Este processo que acentua a equivalência entre uma fração e um quociente, e se baseia em princípios básicos da aritmética (ver nota no final do texto), revela da parte da professora um conhecimento aprofundado deste tema.

Outro exemplo é o de um professor que reparou que os seus alunos resolviam determinado tipo de problemas de divisão com números inteiros através da propriedade distributiva 3 (à direita), de uma forma simples. Então o

professor aplicou esse método no cálculo de $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$, procedendo da seguinte forma:

$$\left(1 + \frac{3}{4}\right) \div \frac{1}{2} = \left(1 \div \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}\right) = 2 + 1\frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$$

³ A divisão, como sabemos, não goza da propriedade distributiva, visto não ser distributiva também à esquerda: $a \div (b + c) \neq a \div b + a \div c$. No entanto $(a + b) \div c = a \div b + a \div c$.

Estes exemplos ilustram o pensamento dos alunos, que por vezes pode ser completamente original e de difícil compreensão. No entanto, um conhecimento profundo das fracções e da divisão permitirá aos professores darem sentido às estratégias dos seus alunos e ajudá-los a fazer conexões com outras estratégias e conceitos.

A obrigatoriedade que existe nalguns currículos de ensinar somente o algoritmo IM é, quanto a nós, bastante redutor. Impede os alunos de procurarem outros processos que podem ser bem mais inteligíveis para eles.

Em resumo

Segundo Pinto, Hélia e Monteiro, Cecília, há quatro aspectos a realçar: primeiro, entender a divisão de racionais fraccionários passa por entender a divisão de números inteiros, relacionar a multiplicação com a divisão e possuir uma compreensão da noção de fracção e fracções equivalentes; segundo, os algoritmos não podem ser ensinados antes da compreensão do conceito, ou deverão, quanto muito, indo sendo abordados durante o percurso de aprendizagem, partindo das estratégias dos alunos. Em terceiro lugar, o processo do desenvolvimento destes conceitos ocorre ao longo de um largo período de tempo, durante o qual os alunos devem ser postos perante problemas de diferentes tipos, sendo-lhes permitido o recurso a estratégias pessoais de cálculo. Finalmente, (quarto) é fundamental que os professores possuam um nível bastante aprofundado da divisão, na sua relação com a multiplicação e das suas propriedades.

Bibliografia:

Pinto, Hélia e Monteiro, Cecília : ” *A divisão de números racionais*” – texto de uma comunicação apresentado no seminário de investigação “Desenvolvendo e sentido do número”, em Setembro de 2007 na ESSE de Setúbal.

Anna O. Graeber e Elaine Tanenhaus; “*Multiplicação e divisão: Dos números inteiros aos números racionais*” incluído no Capítulo ; Research ideas for classroom: Middle Grades Mathematics; pág 99 a 108, Douglas T. Owens, *NCTM*